2010 年度 後期　　中央大学 経済学部

担当 鍬田 政人

線形代数 II・数学 II — 期末試験

2011 年 1 月 13 日

時間 60 分

- 筆記用具以外の持ち込みは不可.
- 最終的な答えだけを書くのではなく途中の計算や説明も書くこと．これがない場合，大幅な減点をすることもある.

$\boxed{1}$ $\mathbf{R}^4$ のベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ を

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

と定義する.

a) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ は一次独立かどうか判定せよ．もし，一次従属ならば，これらのベクトルの間の一次関係式を求めよ.

b) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ で生成される部分空間 $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4 \rangle$ の基底をひとつ求めよ.

c) 部分空間 $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4 \rangle$ の次元をもとめよ.

$\boxed{2}$ A を 3 行 3 列の行列とする．A の固有値は 1，2，4 であり，それぞれの固有値に対する固有ベクトルは $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ であるとする．また，

a) ベクトル $\vec{f}_1$，$\vec{f}_2$，$\vec{f}_3$ を並べてできる行列を P とするとき，P^{-1} を求めよ.

b) A を求めよ.

$\boxed{3}$ $A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix}$ とする.

a) A の固有値と固有ベクトルを求めよ

b) A を対角化せよ.

c) $\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ.

$\boxed{4}$ あるアメリカの大学の学生寮では朝食に，プレーン，セサミ，ガーリックの 3 種類のベーグルを用意している．学期中，毎朝同じ学生達がやって来て，ベーグルを一つずつ選んでいく．この学生たちの行動を観察すると次のようなことがわかった.

- 同じベーグルを 2 日続けて選ぶ学生はいない.
- ある日プレーンを選んだ学生の半分は次の日セサミを選び，残りの半分はガーリックを選ぶ.
- ある日セサミを選んだ学生の 3 分の 2 は次の日プレーンを選び，残りの 3 分の 1 はガーリックを選ぶ.
- ある日ガーリックを選んだ学生の 3 分の 2 は次の日プレーンを選び，残りの 3 分の 1 はセサミを選ぶ.

【裏に続く】

a) 第 n 日目に学生たちが選んだプレーン・ベーグルの数を p_n，セサミ・ベーグルの数を s_n，ガーリック・ベーグルの数を g_n としたとき．ある行列 M を用いて

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ s_{n+1} \\ g_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} p_n \\ s_n \\ g_n \end{pmatrix}$$

と表せる．行列 M を求めよ．

b) 学期が進んでくると，食堂が用意しなければならないそれぞれの種類のベーグルの数は一定に近づく．それぞれの種類の個数を表すベクトルは M の固有値 1 の固有ベクトルとなることを利用し，それらの割合を求めよ．