

1 3つの空間ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ について「交代積」呼ばれる積 $\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$ が定義される. 交代積の値はスカラー (実数) であり, 以下の性質を持つ.

- 【定数倍】 $(k\vec{a}) \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge (k\vec{b}) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} \wedge (k\vec{c}) = k(\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c})$
- 【分配法則】 $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} = \vec{a}_1 \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} + \vec{a}_2 \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$
 $\vec{a} \wedge (\vec{b}_1 + \vec{b}_2) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}_1 \wedge \vec{c} + \vec{a} \wedge \vec{b}_2 \wedge \vec{c}$
 $\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge (\vec{c}_1 + \vec{c}_2) = \vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}_1 + \vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}_2$
- 【交代性】 (2つの項を入れ替えると符号が変わる.)
 $\vec{a} \wedge \vec{c} \wedge \vec{b} = \vec{c} \wedge \vec{b} \wedge \vec{a} = \vec{b} \wedge \vec{a} \wedge \vec{c} = -(\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c})$
- 【正規性】 (単位立方体の体積は1.)
 $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = 1$

$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$, $\vec{c} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3$ とするとき, 交代積の上記の性質を用いて $\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$ を計算せよ.

学生証番号： _____ 氏名： _____

2) 次の各々の行列式をもとめよ.

a)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

b)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -3 & 2 \\ 3 & 7 & 7 \end{vmatrix}$$

3) $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$, $\vec{c} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3$ とする.

a) $a_1\vec{e}_1 \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ となることを示せ.

b) $a_2\vec{e}_2 \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$, $a_3\vec{e}_3 \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$ についても同様の形に表せ.

c) 第1列に関する余因子展開 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ を完成せよ.

4 第2列に関する余因子展開

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

を求めよ.