多変数関数の偏微分

$\boxed{1}$ ある町工場では 2 種類の自転車を製作している．ひとつの種類は標準モデルで，もう 1 種類は競技用モデルである．いま，一週間に，標準モデルを x 台，競技用モデルを y 台製作するのに

$$C(x,y) = 70 + 7x + 10y \text{（千円）}$$

の費用がかかるとしよう．さらに，価格と需要の関係は次の式にしたがっているとする．

$$p = 21 - 0.4x + 0.1y$$
$$q = 30 + 0.1x - 1.2y$$

ここで，x（台），y（台）はそれぞれ標準モデルと競技用モデルの一週間の需要，p（千円），q（千円）はそれぞれ，標準モデルと競技用モデルの値段である．

a) 一週間の歳入 $R(x,y)$ を求めよ．また，$R(25,10)$ を計算せよ．
b) 一週間に得られる利潤 $P(x,y) = R(x,y) - C(x,y)$ を求めよ．また，$P(25,10)$ を計算せよ．
c) 競技用モデルの毎週の生産台数が 10 台で一定のとき，標準モデルを何台生産すれば利潤が最大となるか．
d) 逆に，標準モデルの毎週の生産台数が 25 台で一定のとき，競技用モデルを何台生産すれば利潤が最大となるか．

2 変数関数 $z = f(x,y)$ に対し，変数 y は固定して定数と見なし，z を x の 1 変数関数と見なして微分を計算したものを $z = f(x,y)$ の x に関する偏微分と呼ぶ．これを

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = f'_1(x,y) = f_x(x,y) = \partial_x f(x,y)$$

などと様々な記号で表わされる．同様にして変数 x は固定して定数と見なし，z を y の 1 変数関数と見なして微分を計算したものを $z = f(x,y)$ の y に関する偏微分と呼び

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = f'_2(x,y) = f_y(x,y) = \partial_y f(x,y)$$

などと表わす．

$\boxed{2}$ a) 上の問題の $P(x,y)$ について，$\dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y)$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)$ を求めよ．また，$\dfrac{\partial P}{\partial x}(15,10)$，$\dfrac{\partial P}{\partial x}(30,10)$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}(25,10)$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}(25,15)$ をそれぞれ計算せよ．

b) 利潤 $P(x,y)$ が最大になるような生産台数 x，y の組を求めよ．

$\boxed{3}$ 次の各々の関数について各変数に関する偏微分を計算せよ．

a) $f(x,y) = 5x^4y^2 - 2xy^5$　　b) $f(x,y) = e^{x-y}$　　c) $f(x,y) = \dfrac{e^x}{y}$

d) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$　　e) $f(x,y) = \log(x-y)$　　f) $f(x,y) = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}$

【裏につづく】

関数 $z = f(x, y)$ において x を $x + \Delta x$ に，y を $y + \Delta y$ に同時に変化させたとき，z の増分 Δz は近似的に

$$\Delta z \fallingdotseq \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \Delta y$$

で与えられることが知られている．

$\boxed{4}$ 底面の半径 r cm，高さ h cm の直円柱の底面の半径と高さが，それぞれ，わずかに Δr cm，Δh cm ずつ増えたとき，直円柱の体積はだいたいどれくらい増えるか，また表面積はどれくらい増えるか．

$\boxed{5}$ 生産量 Q が資本 K と労働力 L の関数として $Q = f(K, L) = 3K^{2/3}L^{1/3}$ と表わされている．

a) $\dfrac{\partial f}{\partial K}(K, L)$，$\dfrac{\partial f}{\partial L}(K, L)$ を求めよ．【注】$\dfrac{\partial f}{\partial K}(K, L)$ は**資本の限界生産力**，$\dfrac{\partial f}{\partial L}(K, L)$ は**労働の限界生産力**と呼ばれる．

b) いま (K, L) が $(1000, 125)$ から $(998, 128)$ に変化したとき，Q の変化量の近似値を求めよ．