

Lagrange の乗数法

条件付極値問題

拘束条件 $g(x, y) = 0$ の下で、関数 $f(x, y)$ の極値を求めたい。このとき、新たに第3の変数 λ を導入し、3変数関数 $L(x, y, \lambda)$ を

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

と定義する。（ λ は Lagrange の乗数と呼ばれ $L(x, y, \lambda)$ は Lagrange 関数と呼ばれる。）このとき、 $L(x, y, \lambda)$ の（無条件での）極値を求めると、 $g(x, y) = 0$ の下での $f(x, y)$ の極値が求まることが知られている。したがって、極値を求めるには

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = g(x, y) = 0 \end{cases}$$

を解けばよい。

例題 直線 $lx + my = n$ 上の点と原点 O との距離の最小値を求めよ。

解 拘束条件 $g(x, y) = lx + my - n = 0$ の下で距離の2乗 $f(x, y) = x^2 + y^2$ の最小値を求めればよい。そこで $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(lx + my - n)$ とおき、偏微分を計算する。

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = 2x - \lambda l = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = 2y - \lambda m = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = lx + my - n = 0 \end{cases}$$

第1式を λ について解き、第2式に代入して整理すると

$$mx - ly = 0$$

が得られる。これと第3式を x, y についての連立1次方程式と見て解くと

$$x = \frac{ln}{l^2 + m^2}, \quad y = \frac{mn}{l^2 + m^2}$$

を得る。本来、このままではこの x, y で $f(x, y)$ が極小になるか極大になるかは機械的に判断できないが、この問題では図形的に容易に最小値だけが存在し、最大値が存在しないことがわかる。そこで、上の値を $f(x, y)$ に代入して、 $f(x, y)$ の最小値は $\frac{n^2}{l^2 + m^2}$ となる。したがって距離の最小値は $\frac{|n|}{\sqrt{l^2 + m^2}}$ 。

- 1 条件 $x^2 + y^2 = 1$ のもとで, $3x^2 + 2xy + y^2$ の最大値と最小値を求めよ.
- 2 条件 $x^2 + 2xy + 4y^2 = 1$ のもとで, $f(x, y) = xy$ の最大値と最小値を求めよ.
- 3 【効用最大化問題】 消費者の効用関数が $u(x, y) = x^\alpha y^\beta$ で与えられているとする. このとき, 所得制約式 $p_1x + p_2y = I$ のもとで $u(x, y)$ を最大にする (x, y) を Lagrange の乗数法により求めよ.
- 4 【費用最小化問題】 消費者の効用関数 $u(x, y) = x^\alpha y^\beta$ をある一定レベル u_0 に保ち, この効用レベルで支出 $S(x, y) = p_1x + p_2y$ を最小にしたい. そのような (x, y) を Lagrange の乗数法により求めよ.
- 5 厚紙を用いて図のような中仕切りがあるふたつきの箱をつくる. 使用する厚紙の面積が一定値 S であるとき, 容積 V が最大になるような箱の寸法を求めよ. またその時の箱の容積を求めよ.

