

指数関数の導関数

a が 1 でない正の定数のとき, a を底とする x の指数関数

$$f(x) = a^x$$

の導関数を求めたい. いま, x が $x + h$ になるとすれば,

$$f(x + h) - f(x) = a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1)$$

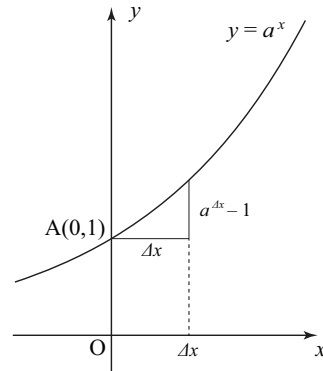
であるから,

$$(1) \quad \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h}$$

となる. ここで, $h \rightarrow 0$ とすれば $f'(x)$ が得られるわけであるが, 右の図において

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

というのは, 曲線 $y = a^x$ の上の点 $A(0, 1)$ における接線の傾きである. いま, それを m_a で表すことにすれば, (1) から

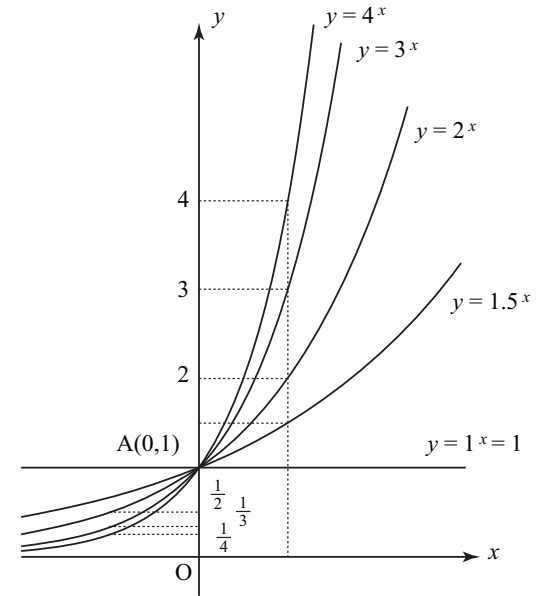


$$(2) \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h} \right) = a^x \cdot m_a$$

ということになる.

さて, 次の項の図からわかるように, 曲線 $y = a^x$ の上の点 $A(0, 1)$ における接線の傾き m_a は, a が大きくなるほど大きくなる. したがって, ちょうど

$$m_a = 1$$



となるような a の値があるであろうと考えられる. いま, その値を e という文字で表す. すなわち, e は

$$(3) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

をみたす数であるとする. すると (2) から,

$$f(x) = e^x \quad \text{ならば} \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x$$

が得られる.

指数関数の導関数 :

$$(e^x)' = e^x$$

この e を底とする対数 $\log_e a$ は自然対数と呼ばれ, $\log_e a$ を単に $\log a$ と表すことが普通である. このため, e は自然対数の底と呼ばれる. e は

Napier の数と呼ばれることもある. e は無理数であって

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = 2.7182828 \cdots$$

であることが知られている.

つぎに, $f(x) = a^x$ の導関数を求めてみよう. まず, 対数の定義から

$$a = e^{\log_e a}$$

であることに注意する. したがって,

$$a^x = (e^{\log_e a})^x = e^{(\log_e a)x}$$

そこで, 合成関数の微分法により

$$\begin{aligned} (a^x)' &= (e^{(\log_e a)x})' = e^{(\log_e a)x} \cdot ((\log_e a)x)' \\ &= (\log_e a) e^{(\log_e a)x} = (\log_e a) a^x \end{aligned}$$

を得る.

後に示す 2 つの表は $a = 2, 3$ のときの $\frac{a^h - 1}{h}$ の値を計算したものである. 平方根が計算できる電卓のみを用いて計算できるように, $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ と, h の値をつぎつぎに $\frac{1}{2}$ にして計算する. この表の結果をみると, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1$ となる a の値, すなわち e は, 2 と 3 の間にあり, どちらかといえば 3 に近い値であることが予想される.

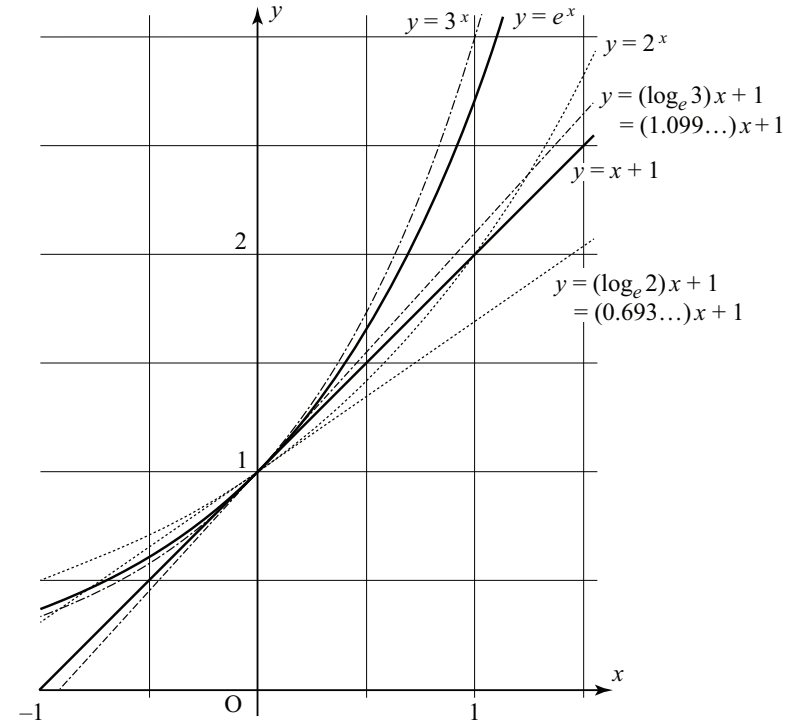
次の項のグラフは $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = e^x$ とそれぞれの $A(0, 1)$ における接線を 1 つのグラフにしたものである.

さて, ここまでは, (3) のような定数 e が存在することをグラフの上から直観的に認めたのであるが, 本来はこのような e が存在することを厳密に証明しなければならない. そこで,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

において, $e^h - 1 = t$ とおけば,

$$e^h = 1 + t \quad \therefore h = \log_e(1 + t)$$



であって, $h \rightarrow 0$ のとき $t \rightarrow 0$ であるから, (3) の式は

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_e(1+t)} = 1 \quad \therefore \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_e(1+t)}{t} = 1$$

と同じことであり, これは, また

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \log_e(1+t) = 1 \quad \therefore \lim_{t \rightarrow 0} \log_e(1+t)^{\frac{1}{t}} = 1$$

すなわち,

$$(4) \quad \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

というのと同じである. 厳密な証明は, まず $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}$ という極限値が存在することを証明し, その極限値を e とすれば (3) が成り立つという順序で示していくのが一般的な方法である.

h	2^h	$\frac{2^h - 1}{h}$
$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2} = 1.4142136$	$0.4142136 \times 2 = 0.8284271$
$\frac{1}{4}$	$\sqrt{1.4142136} = 1.1892071$	$0.1892071 \times 4 = 0.7568285$
$\frac{1}{8}$	$\sqrt{1.1892071} = 1.0905077$	$0.0905077 \times 8 = 0.7240619$
$\frac{1}{16}$	$\sqrt{1.0905077} = 1.0442738$	$0.0442738 \times 16 = 0.7083805$
$\frac{1}{32}$	$\sqrt{1.0442738} = 1.0218971$	$0.0218971 \times 32 = 0.7007088$
$\frac{1}{64}$	$\sqrt{1.0218971} = 1.0108893$	$0.0108893 \times 64 = 0.6969143$
$\frac{1}{128}$	$\sqrt{1.0108893} = 1.0054299$	$0.0054299 \times 128 = 0.6950273$
$\frac{1}{256}$	$\sqrt{1.0054299} = 1.0027113$	$0.0027113 \times 256 = 0.6940864$
$\frac{1}{512}$	$\sqrt{1.0027113} = 1.0013547$	$0.0013547 \times 512 = 0.6936166$
$\frac{1}{1024}$	$\sqrt{1.0013547} = 1.0006771$	$0.0006771 \times 1024 = 0.6933818$
\vdots		\downarrow
0		0.6931472

h	3^h	$\frac{3^h - 1}{h}$
$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3} = 1.7320508$	$0.7320508 \times 2 = 1.4641016$
$\frac{1}{4}$	$\sqrt{1.7320508} = 1.3160740$	$0.3160740 \times 4 = 1.2642961$
$\frac{1}{8}$	$\sqrt{1.3160740} = 1.1472027$	$0.1472027 \times 8 = 1.1776215$
$\frac{1}{16}$	$\sqrt{1.1472027} = 1.0710755$	$0.0710755 \times 16 = 1.1372077$
$\frac{1}{32}$	$\sqrt{1.0710755} = 1.0349278$	$0.0349278 \times 32 = 1.1176885$
$\frac{1}{64}$	$\sqrt{1.0349278} = 1.0173140$	$0.0173140 \times 64 = 1.1080958$
$\frac{1}{128}$	$\sqrt{1.0173140} = 1.0086198$	$0.0086198 \times 128 = 1.1033405$
$\frac{1}{256}$	$\sqrt{1.0086198} = 1.0043007$	$0.0043007 \times 256 = 1.1009730$
$\frac{1}{512}$	$\sqrt{1.0043007} = 1.0021480$	$0.0021480 \times 512 = 1.0997918$
$\frac{1}{1024}$	$\sqrt{1.0021480} = 1.0010734$	$0.0010734 \times 1024 = 1.0992018$
\vdots		\downarrow
0		1.0986123

対数関数の導関数

底が e である対数を自然対数という。こんご単に $\log x$ と書けば、自然対数 $\log_e x$ を表すものとする。自然対数の導関数を求めよう。

一般に、 $f(x)$ の逆関数を $f^{-1}(x)$ とすると、 $f(f^{-1}(x)) = x$ が成り立つ。この両辺を x で微分すると、合成関数の微分法により、

$$(f(f^{-1}(x)))' = f'(f^{-1}(x))(f^{-1}(x))' = (x)' = 1$$

となり、逆関数の微分公式

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

を得る。ここで、 $f(x) = e^x$ とおくと、 $f^{-1}(x) = \log x$ であり、 $f'(x) = e^x$ であるから、

$$(\log x)' = \frac{1}{e^{\log x}}$$

ここで、 $e^{\log x} = x$ であることに注意すると、 $(\log x)' = \frac{1}{x}$ を得る。

対数関数の導関数：

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

対数関数の導関数は次のようにしても求められる。

$$\begin{aligned} (\log x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) \end{aligned}$$

であって、 $t = \frac{h}{x}$ とおけば、 $h \rightarrow 0$ のとき $t \rightarrow 0$ であるから、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{xt} \log(1+t) = \frac{1}{x} \lim_{t \rightarrow 0} \log(1+t)^{\frac{1}{t}}$$

ここで、(4) を用いると、

$$\frac{1}{x} \lim_{t \rightarrow 0} \log(1+t)^{\frac{1}{t}} = \frac{1}{x} \lim_{t \rightarrow 0} \log e = \frac{1}{x}$$

すなわち、 $(\log x)' = \frac{1}{x}$ を得る。

一般の対数関数 $\log_a(x)$ については、底の変換公式により、次を得る。

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\log x}{\log a}\right)' = \frac{1}{x \log a}$$

e について補足

極限 $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$ の意味を次のように考えることができる。いま、一万円の元金に年利率 1 (10 割、もちろん違法) で利息をつければ、1 年後には 2 万円となるが、これの代わりに、利率 $\frac{1}{n}$ 、 $\frac{1}{n}$ 年ごとの複利法で利息をつけると、1 年間には n 回利息が付き、1 年後の元利合計は $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (万円) となる。(下の表参照) したがって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

とは、瞬間ごとに利息の付いていく複利法の元利合計と考えられる。自然界には、このような連続複利法則にしたがうと考えられる現象も多いが、それらの研究において、この e という数は欠くことのできない大切なものである。

$t = \frac{1}{n}$	$(1+t)^{\frac{1}{t}} = \left(\frac{1}{n}\right)^n$
1	$(1+1)^1 = 2$
0.1	$(1+0.1)^{0.1} = 2.59374$
0.01	$(1+0.01)^{0.01} = 2.70481$
0.001	$(1+0.001)^{0.001} = 2.71692$
0.0001	$(1+0.0001)^{0.0001} = 2.71815$
0.00001	$(1+0.00001)^{0.00001} = 2.71827$
\vdots	\downarrow 2.71828...