

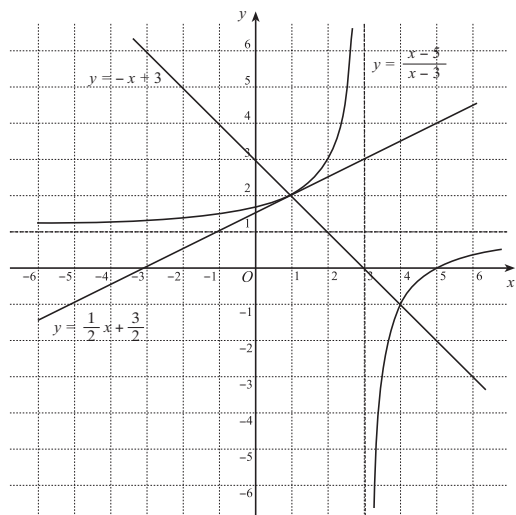
「復習問題」 (12月16日配布) 解答例

1 a) $\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 1$

b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h-4}{h-2} - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2-h} = \frac{1}{2}$

c) 接線の方程式は $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ だから, $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

d) $f(x) = \frac{x-5}{x-3} = 1 + \frac{-2}{x-3}$ とかけるので, $y = f(x)$ のグラフは $y = \frac{-2}{x}$ のグラフを x 軸方向に $+3$, y 軸方向に $+1$ だけ平行移動した曲線である.



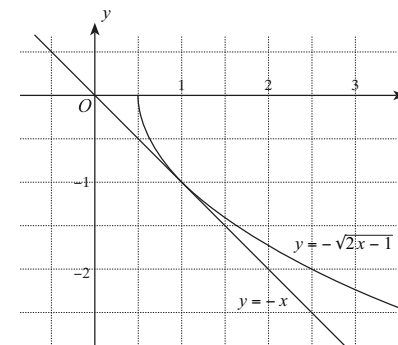
e) $y = f(x)$ のグラフの方が $y = -x + 3$ のグラフより上にある x の範囲を求めればよい. $y = f(x)$ と $y = -x + 3$ の交点の x 座標は 1 と 4 なので, 上のグラフを参照して, $1 < x < 3, x > 4$.

2 a) $\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 1 - \sqrt{3}$

b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sqrt{2h+1} + 1}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-\sqrt{2h+1} + 1)(\sqrt{2h+1} + 1)}{h(\sqrt{2h+1} + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2}{(\sqrt{2h+1} + 1)} = -1$

c) 接線の方程式は $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ だから, $y = -x$

e)

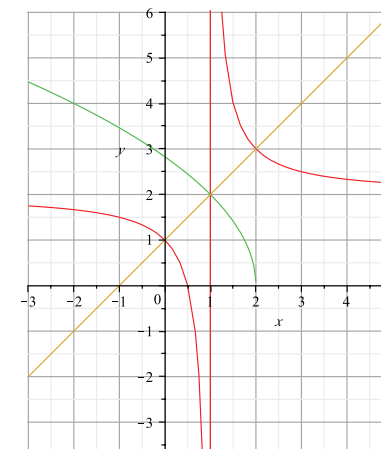


3 a) 定義域は $-4x + 6 \geq 0$, すなわち $x \leq \frac{3}{2}$. また, 値域は $y \geq 0$.

b) $y = \sqrt{-4x + 6}$ を x について解くと $x = -\frac{1}{4}y^2 + \frac{3}{2}$ となる. ここで, x と y を入れ換えて, $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}$. すなわち, $f^{-1}(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}$.

c) 逆関数 $f^{-1}(x)$ の定義域は $f(x)$ の値域 (で x と y を入れ換えたもの) なので, $x \geq 0$. また, $f^{-1}(x)$ の値域は $f(x)$ の定義域 (で x と y を入れ換えたもの) なので, $y \leq \frac{3}{2}$.

4 下のグラフより, a) $0 < x < 1$ または $x > 2$. b) $x \leq 1$



5 a) $(g \circ f) = g\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{\left(\frac{1}{1-x}\right) + a}{\frac{1}{1-x}} = 1 + a(1-x)$

$$(f \circ g) = f\left(\frac{x+a}{x}\right) = \frac{1}{1 - \frac{x+a}{x}} = \frac{-x}{a}$$

- b) $1 + a(1-x) = \frac{-x}{a}$ がすべての x について成り立てばよい. この式を x について整理すると, $\frac{1-a^2}{a}x + (1+a) = 0$. この式の x の係数と定数項がともに 0 になるためには $a = -1$ が必要十分.

- 6) a) $f(x)$ の定義域は $x \neq -2$. 値域を求める前にまず逆関数を求める. $y = \frac{2x-1}{x+2}$ を x について解くと $x = \frac{-(2y+1)}{y-2}$ となるから, x と y を入れ換え $f^{-1}(x) = \frac{-(2x+1)}{x-2}$. したがって, $f(x)$ の値域 ($= f^{-1}(x)$ の定義域で x と y とおき変えたもの) は $y \neq 2$. また, $f^{-1}(x)$ の定義域は $x \neq 2$, 値域は $y \neq -2$.

- b) $f(x)$ の定義域は真数条件より $x < 1$. 値域は実数全体. $y = -\log(1-x)$ を x について解くと $x = 1 - e^{-y}$ となるから, x と y を入れ換え $f^{-1}(x) = 1 - e^{-x}$. $f^{-1}(x)$ の定義域は実数全体, 値域は $= f(x)$ の定義域で x と y とおき変えたもので, $y < 1$.

7) a) $((2x^3 + 5)^7)' = 7(2x^3 + 5)^6(2x^3 + 5)' = 42x^2(2x^3 + 5)^6$

b) $\left(\frac{1}{(x^2-3)^2}\right)' = \frac{-(x^2-3)^2'}{(x^2-3)^4} = \frac{-2(x^2-3)(x^2-3)'}{(x^2-3)^4} = \frac{-4x}{(x^2-3)^3}$

c) $((x^2+3)(x^2-2x+2))' = (x^2+3)'(x^2-2x+2) + (x^2+3)(x^2-2x+2)' = 2x(x^2-2x+2) + (2x-2)(x^2+3) = 2(2x^3-3x^2+5x-3)$

d) $\left(\frac{2x-5}{3x^2+1}\right)' = \frac{(2x-5)'(3x^2+1) - (2x-5)(3x^2+1)'}{(3x^2+1)^2} = \frac{2(3x^2+1) - (2x-5)(6x)}{(3x^2+1)^2} = \frac{-2(3x^2-15x-1)}{(3x^2+1)^2}$

e) $\left(\frac{x^4+3x-2}{x^2}\right)' = (x^2+3x^{-1}-2x^{-2})' = 2x-3x^{-2}+4x^{-3} = \frac{2x^4-3x+4}{x^3}$

f) $\left(\frac{x}{x^2-x+1}\right)' = \frac{(x)'(x^2-x+1) - x(x^2-x+1)'}{(x^2-x+1)^2} = \frac{x^2-x+1-x(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2-x+1)^2}$

g) $\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)' = (x^{-\frac{3}{2}})' = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} = \frac{-3}{2x^2\sqrt{x}}$

h) $\left(\sqrt[3]{2x^2+5}\right)' = ((2x^2+5)^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}(2x^2+5)^{-\frac{2}{3}}(2x^2+5)' = \frac{4x}{3}(2x^2+5)^{-\frac{2}{3}}$

i) $\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)' = \frac{-(x+\sqrt{x^2-1})'}{(x+\sqrt{x^2-1})^2} = -\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{(x+\sqrt{x^2-1})^2} = -\frac{\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}}{(x+\sqrt{x^2-1})^2} = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}(x+\sqrt{x^2-1})}$

j) $(e^{-3x^2})' = e^{-3x^2}(-3x^2)' = -6xe^{-3x^2}$

k) $(x^2e^{-x})' = (x^2)'e^{-x} + x^2(e^{-x})' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$

l) $\left(\frac{e^x}{1-e^x}\right)' = \frac{(e^x)'(1-e^x) - e^x(1-e^x)'}{(1-e^x)^2} = \frac{e^x(1-e^x) - e^x(-e^x)}{(1-e^x)^2} = \frac{e^x}{(1-e^x)^2}$

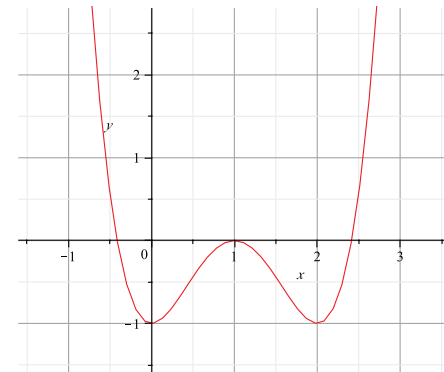
m) $\left(\frac{x}{\log x - 1}\right)' = \frac{(x)'(\log x - 1) - x(\log x - 1)'}{(\log x - 1)^2} = \frac{\log x - 1 - x \cdot \frac{1}{x}}{(\log x - 1)^2} = \frac{\log x - 2}{(\log x - 1)^2}$

n) $(\log(x^2+1))' = \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1}$

o) $(e^x \log x)' = (e^x)' \log x + e^x(\log x)' = e^x \log x + e^x \frac{1}{x} = \frac{e^x(x \log x + 1)}{x}$

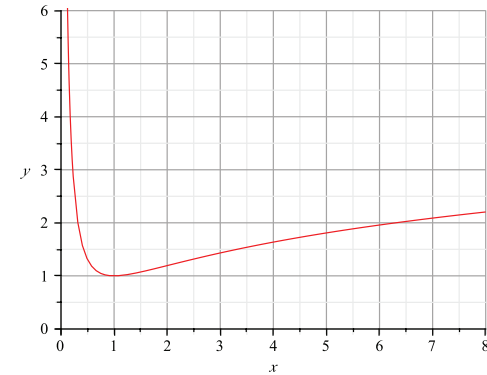
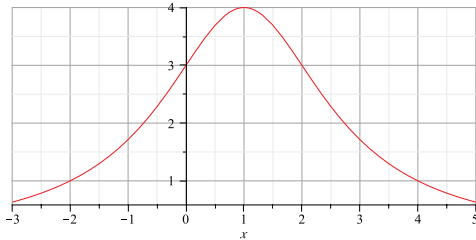
- 8) a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$, $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x-1)(x-2)$
 $f''(x) = 4(3x^2 - 6x + 2)$, $f''(x) = 0$ となるのは $x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$.

x		0		$\frac{3-\sqrt{3}}{3}$		1		$\frac{3+\sqrt{3}}{3}$		2	
$f'(x)$	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$f''(x)$	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$f(x)$	\searrow	-1	\nearrow	$-\frac{5}{9}$	\nearrow	0	\searrow	$-\frac{5}{9}$	\searrow	-1	\nearrow



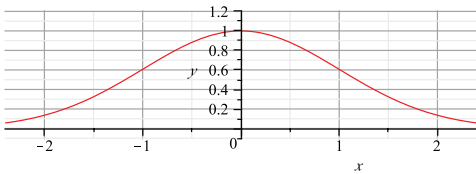
b) $f(x) = \frac{12}{x^2 - 2x + 4}$, $f'(x) = \frac{-24(x-1)}{(x^2 - 2x + 4)^2}$, $f''(x) = \frac{72x(x-2)}{(x^2 - 2x + 4)^3}$

x		0	1	2		
$f'(x)$	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	↗	3	↖	4	↘	3



c) $f(x) = e^{-x^2/2}$, $f'(x) = -xe^{-x^2/2}$, $f''(x) = (x-1)(x+1)e^{-x^2/2}$

x		-1	0	1		
$f'(x)$	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	↗	$e^{-1/2}$	↖	1	↘	$e^{-1/2}$



d) $f(x) = \frac{1}{x} + \log x$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}$, $f''(x) = -\frac{x-2}{x^3}$

x	0	1	2	
$f'(x)$	-	0	+	+
$f''(x)$	+	+	0	-
$f(x)$	↘	1	↗	$\frac{1}{2} + \log 2$

9) a) $f'(x) = \frac{-(2x+1)(x-1)}{\sqrt{1-x^2}}$ となるので、増減表を書くと

x	-1	$-\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	0	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$

したがって、 $x = \pm 1$ のとき最大値 0 をとり、 $x = -\frac{1}{2}$ のとき最小値 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ をとる。

b) $f'(x) = -4(x-1)e^{-2x}$ なので、増減表は以下の通り。

x	0	1	3
$f'(x)$		+	0
$f(x)$	-1	↗	e^{-2}

したがって、 $x = 1$ のとき最大値 e^{-2} をとり、 $x = 0$ のとき最小値 -1 をとる。

10) 缶詰の底面の半径を r 、高さを h とすると、缶詰の表面積を S とすると、 $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ と表せる。 $S = 6\pi a^2$ という条件は $2\pi r^2 + 2\pi rh = 6\pi a^2$ と表せるが、これより

$$h = \frac{3a^2 - r^2}{r}$$

を得る。一方、缶詰の体積 V は $V = \pi r^2 h$ と表せるが、これに上で得た h の式を代入し、

$$V = \pi r^2 \frac{3a^2 - r^2}{r} = \pi r(3a^2 - r^2)$$

を得る. これを r で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dr} &= \pi((r)'(3a^2 - r^2) + r(3a^2 - r^2)') = \pi((3a^2 - r^2) + r(-2r)) \\ &= 3\pi(a^2 - r^2) = 3\pi(a - r)(a + r)\end{aligned}$$

$r > 0$ のときの増減表は以下の通り.

r	0		a	
$\frac{dV}{dr}$		+	0	-
V	0	↗	$2\pi a^3$	↘

したがって, 体積 V は $r = a$, $h = (3a^2 - a^2)/a = 2a$ のとき最大になる.