復習問題の略解

1 a) $3x^2+10x+8=(3x+4)(x+2)$
b) $6a^2+11ab-2b^2=(a+2b)(6a-b)$
c) $x^4y-xy^4=xy(x^3-y^3)=xy(x-y)(x^2+xy+y^2)$
d) $81a^3+3=3\big((3a)^3+1^3\big)=3(3a+1)(9a^2-3a+1)$

2 筆算による割り算を実行すると，商は $3x+2$，余りは $x+6$ となる．
（これより，$3x^3-4x^2+12x+16=(x^2-2x+5)(3x+2)+(x+6)$ と表せる．）

3 a) $P(2)=2^3+5\cdot 2^2-2\cdot 2-24=0$．これより，$P(x)$ を $x-2$ で割ったときの余りは 0 であること，すなわち $P(x)$ は $x-2$ で割り切れることがわかる．
b) $P(x)$ を $x-2$ で割ると，$P(x)=(x-2)(x^2+7x+12)$．$(x^2+7x+12)$ をさらに因数分解して $P(x)=(x-2)(x+3)(x+4)$.
c) $x^3+x^2-6x=x(x-2)(x+3)$ と因数分解されるので，最大公約数は $(x-2)(x+3)$，最小公倍数は $x(x-2)(x+3)(x+4)$.

4 a) $\dfrac{b}{a^3}$　b) $3x^{-2}$　c) 2　d) $9x^2y^3$

5 a) $\dfrac{1}{abc}$　b) $\dfrac{8ab-6a+5b}{15ab}$　c) $\dfrac{-x(2x-13)}{(2x-1)(2x+5)}$　d) $-\dfrac{x-3}{(x-1)(x-2)}$
e) $-\dfrac{x+27}{(x-3)^2(x+3)}$　f) $\dfrac{x+14}{(x+2)^2(x-2)}$　g) 0　h) $\dfrac{y-x}{xy-1}$　i) $\dfrac{1}{x}$

6 もとの立方体の 1 辺の長さを x とする．縦横を変えて作った立方体の体積は $(x-2)(x+5)x$．これがもとの立方体の体積 x^3 より $48\mathrm{cm}^3$ したのだから，$(x-2)(x+5)x=x^3+48$．これを整理し，因数分解すると $(3x+8)(x-6)=0$．ここで，$x>0$ だから，$x=6$ が唯一の解となる．

7 a) $x\leqq -3$，$x\geqq 1$,　b) $3-\sqrt{2}<x<3+\sqrt{2}$　c) $x<-1-\sqrt{2}$，$x>-1+\sqrt{2}$

8 $y=x^2-2x-2=(x-1)^2-3$ とし，$-1\leqq x\leqq 5$ においてグラフまたは増減表をかく．$x=5$ のとき最大で，最大値 13．$x=1$ のとき最小で，最小値 -3.

9 a) 1 円値上げすると $\frac{1}{2}$ 個売り上げが減るということだから，x 円値上げすると $\frac{x}{2}$ 個売り上げが減る．したがって，売価が $(80+x)$ 円のとき何個の売り上げは $\big(100-\frac{x}{2}\big)$ となり，売上金額は（売価）×（売り上げ個数）$=(80+x)\big(100-\frac{x}{2}\big)=-\frac{1}{2}(x-60)^2+9800$．これより，最の売り上げ金額を得るための売価は $80+60=140$ 円.
b) a) より，最の売り上げ金額を得るの $x=60$ のとき．このとき，売価は $80+60=140$ 円.

10 短い辺の長さを x とすると，長い辺の長さは $10-x$ となる．「短い辺」が「長い辺」より本当に短いための条件は $x<10-x$．すなわち $x<5$ である．一方，長方形の面積は $x(10-x)$ なので，

$$x(10-x)\geqq 21 \iff -x^2+10x-21\geqq 0 \iff (x-3)(x-7)\leqq 0 \iff 3\leqq x\leqq 7$$

これと先ほどの条件を合わせて $3\leqq x<5$.

11 a) 5　b) 1　c) $\dfrac{10}{3}$　d) 5

【裏につづく】

$\boxed{12}$ 光が 1 回反射するごとに光度は $\dfrac{9}{10}$ になので，反射を n 回繰り返すたとき，光度はもとの $\left(\dfrac{9}{10}\right)^n$ になる．これが $\dfrac{1}{9}$ 以下になるようにしたい．すなわち，$\left(\dfrac{9}{10}\right)^n < \dfrac{1}{9}$ となる n を求めればよい．両辺の $\log_{10}$ をとり，対数の基本性質を用いて変形すると，$n(\log_{10} 9 - \log_{10} 10) < \log_{10} 1 - \log_{10} 9$．さらに変形して $n(2\log_{10} 3 - 1) < -2\log_{10} 3$．ここで，$\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いて数値計算すると（n の係数が負なので不等号の向きが変わることに注意して），$n >= \frac{2\log_{10} 3}{1-2\log_{10} 3} = 20.834\ldots.$ すなわち，21 回反射させればよいことがわかる．

$\boxed{13}$ a）3　　b）-2　　c）a

$\boxed{14}$ a）$f'(0) = \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(2h-1)^2 - (-1)^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4h^2 - 4h}{h} = \lim_{h\to 0}(4h-4) = -4$

b）$f'(1) = \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\bigl(2(1+h)-1\bigr)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4h^2 + 4h}{h} = \lim_{h\to 0}(4h+4) = 4$

c）$f'(a) = \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\bigl(2(a+h)-1\bigr)^2 - (2a-1)^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4h^2 + 8ah - 4h}{h} = \lim_{h\to 0}(4h+8a-4) = 4(2a-1)$

$\boxed{15}$ a）$f'(x) = 2(x+3x^2) + 2x(1+6x) = 2x(2+9x)$

b）$f'(x) = 2(3x-5) + (2x+3)\cdot 3 = 12x - 1$

c）$f'(x) = (x^2+x+1) + (x-1)(2x+1) = 3x^2$　（$f(x) = x^3 - 1$ に気が付けばすぐに求まる．）

$\boxed{16}$ a）16　　b）8

c）$f'(2) = \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^3 - (2+h)^2 - (2+h) + 1 - 3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3 + 5h^2 + 7h}{h} = \lim_{h\to 0} h^2 + 5h + 7 = 7$

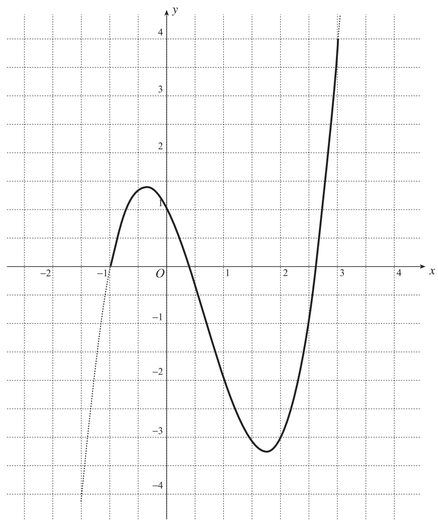
d）$y = 7x - 11$

e）$f'(x) = -1$ となる x は 0 と $\dfrac{2}{3}$．$x = 0$ での接線 $y = -x + 1$，$x = \dfrac{2}{3}$ での接線 $y = -x + \dfrac{5}{27}$

f）$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$　　g）$x = 1,\ -\dfrac{1}{3}$

h）増減表を書くと $x = -\dfrac{1}{3}$ で極大値 $\dfrac{32}{27}$，$x = 1$ で極小値 0.

$\boxed{17}$ $f'(x) = 3x^2 - 4x - 2$ で，$f'(x) = 0$ となるのは $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{10}}{3}$ のとき．$-1 < \dfrac{2-\sqrt{10}}{3} < \dfrac{2+\sqrt{10}}{3} < 3$ となるので，この範囲で増減表を書くと（増減表割愛）$f(x)$ は $x = \dfrac{2+\sqrt{10}}{3}$ のとき最小で，最小値 $-\dfrac{25-20\sqrt{10}}{27} \fallingdotseq -3.27$，$x = 3$ のとき最大で，最大値 4 となる．グラフは右の図のようになる．



$\boxed{18}$ a）各辺が正でなければいけないので $x > 0$ かつ $10 - 2x > 0$ かつ $16 - 2x > 0$．ゆえに $0 < x < 5$．

b）体積 $V = x(10-2x)(16-2x) = 4x(5-x)(8-x)$．

c）$V' = \bigl(4(x^3 - 13x^2 + 40x)\bigr)' = 4(3x^2 - 26x + 40) = 4(x-2)(3x-20)$．$0 < x < 5$ の範囲で $V' = 0$ となるのは $x = 2$ のみ．$0 < x < 5$ の範囲で増減表を書いてみると，$x = 2$ のとき，体積 V は最大となる．