練習問題 2

1 $P_1 = (1:0:0)$, $P_2 = (0:1:0)$, $P_3 = (0:0:1)$, $P_4 = (1:1:1)$ を射影平面 $\mathbb{P}^2$ 内の 4 点とし，$P_5 = (a:b:c)$ とする．さらに，$P_1, \ldots, P_5$ を通る 2 次曲線を $C_{(a:b:c)}$ とする．

a) $C_{(a:b:c)}$ の方程式を求めよ．

b) $C_{(a:b:c)}$ が非退化であるための条件を求めよ．

2 C_1，C_2 を次の方程式で与えられる 3 次曲線とする．

$$C_1 : X^3 + 2Y^3 - XZ^2 - 2YZ^2 = 0,$$
$$C_2 : 2X^3 - Y^3 - 2XZ^2 + YZ^2 = 0.$$

a) C_1 と C_2 の 9 つの交点を求めよ．

b) $\{(0,0), P_1, \ldots, P_8\}$ を a) で求めた交点とする．$P_1, \ldots, P_8$ を通る 3 次曲線は 9 番目の点 $(0,0)$ も通ることを直接確かめよ．

3 t をパラメータとし，C を下の式でで定義される 3 次曲線とする．

$$X^3 + Y^3 + Z^3 = 3tXYZ$$

a) 点 $O = (1:-1:0)$ は変曲点であることを示せ．

b) C 上の点全体の集合に対し，授業で説明したように群構造を定義する．$P = (X:Y:Z)$, $T = (-1:0:1)$ とするとき，$-P$ および $P + T$ の座標を求めよ．

c) $2T = -T$，$3T = O$ が成り立つことを示せ．

4 $F(X,Y,Z) \in k[X,Y,Z]$ を n 次同次多項式とする．

a) F の 3 つの偏微分はいずれも $n-1$ 次同次多項式であることを示せ．

b) 次の式が成り立つことを示せ．

$$X\frac{\partial F}{\partial X} + Y\frac{\partial F}{\partial Y} + Z\frac{\partial F}{\partial Z} = nF(X,Y,Z).$$

［ヒント：$F(tX,tY,tZ) = t^n F(X,Y,Z)$ を t の関数とみて微分せよ.］

c) C を $\mathbb{P}^2$ 内で $F(X,Y,Z) = 0$ で定義される曲線とし，P を $\mathbb{P}^2$ の点とする．P は必ずしも C 上の点であるとは仮定しない．このとき，P が C の特異点であるためには

$$\frac{\partial F}{\partial X}(P) = \frac{\partial F}{\partial Y}(P) = \frac{\partial F}{\partial Z}(P) = 0$$

が成り立つことが必要十分であることを示せ．

d) P を C 上の非特異な点とする．C の P における接線の方程式は

$$X\frac{\partial F}{\partial X}(P) + Y\frac{\partial F}{\partial Y}(P) + Z\frac{\partial F}{\partial Z}(P) = 0.$$

で与えられることを示せ．

【裏につづく】

$\boxed{5}$ C を非特異な 3 次曲線とし，O を C 上の点とする．C 上の点全体の集合に，以下のようにして演算を定義する．与えられた点 $P, Q \in C$ に対し，P，Q を通る直線と C は 3 点で交わるが，P，Q にくわえた第 3 の点を $P * Q$ とする．ただし，$P = Q$ のときは P，Q を通る直線とは P における C の接線とする．

a) このようにして定義された演算には，一般に単位元が存在しないことを示せ．すなわち，$P_0 * P = P$ が任意の $P \in C$ について成り立つような $P_0 \in C$ は存在しないことを示せ．

b) このようにして定義された演算は，一般に結合法則をみたさないことを示せ．すなわち，一般に $P * (Q * R) \neq (P * Q) * R$ であることを示せ．

c) $P * (P * Q) = Q$ であることを示せ．

d) O と S を通る直線が O において C に接するとする．このとき，次の式が成り立つことを示せ．

$$O * \bigl(Q * (Q * S)\bigr) = O$$

$\boxed{6}$ 集合 S には以下の性質を持つ演算 $\star$ が定義されているとする．

i) $P \star Q = Q \star P \quad \forall P, Q \in S.$

ii) $P \star (P \star Q) = Q \quad \forall P, Q \in S.$

元 $O \in S$ を 1 つ選び固定し，新しい演算 $+$ を以下のように定義する．

$$P + Q = O \star (P \star Q).$$

a) $+$ は可換であり，O は演算 $+$ の単位元となることを示せ．

b) 任意の $P, Q \in S$ に対し，方程式 $X + P = Q$ はただ一つの解 $X = P \star (Q \star O)$ を持つことを示せ．また，$-P$ を $P \star (Q \star O)$ と定義すると，$-P$ は方程式 $X + P = O$ のただ一つの解であることを示せ．

c) 次の条件は演算 $+$ が結合法則をみたすための必要十分条件であることを示せ．

iii) $P \star (O \star (R \star Q)) = Q \star (O \star (P \star R)) \quad \forall P, Q, R \in S.$

d) O' を S の別の元とする. 新たな演算 $+'$ を $P +' Q = O' \star (P \star Q)$ で定義する．さらに，$+$ も $+'$ も結合法則をみたし，$(S, +)$ and $(S, +')$ は群であるとする．このとき，写像

$$P \mapsto O \star (O' \star P)$$

は $(S, +)$ から $(S, +')$ への同型写像であることを示せ．