2011 年度 後期 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　埼玉大学理学部・大学院理工学研究科

担当 鍬田 政人

数学特別講義 I・数学特論 I — 在宅中間試験

出題： 2011 年 12 月 6 日

提出日時： 12 月 13 日の授業開始前

- ノート・参考書などは参照してもよいが，人とは相談せず，独力で解答すること．
- 最終的な答えが導けなくてもできるところまで解答すること．逆に，最終的な解答だけを書いて途中の計算や説明がない場合，大幅な減点をすることもある．
- 定義体はすべて複素数体 $\mathbf{C}$ とする．

$\boxed{1}$ $9x^4 - 18x^2 + 12x - 2 = 0$ を解け．

$\boxed{2}$ Q_1 を $X^2 + Y^2 - 2XZ - Z^2 = 0$ で定義される 2 次曲線とし， Q_2 を $X^2 - 2XZ - 2YZ - 2Z^2 = 0$ で定義される 2 次曲線とする．このとき $\lambda Q_1 + \mu Q_2 = 0$ で定義される 2 次曲線の族に含まれる 2 次曲線で退化したものをすべて求めよ．

$\boxed{3}$ C_1, C_2 を以下の方程式で定義される $\mathbf{P}^2$ 内の 3 次曲線とする．

$$C_1 : F_1(X,Y,Z) = X^3 - 3X^2Y + 3XY^2 + Y^3 - XZ^2 - YZ^2 = 0,$$
$$C_2 : F_2(X,Y,Z) = X^3 - 3X^2Y + 3XY^2 - 3Y^3 - XZ^2 + 3YZ^2 = 0.$$

1) C_1 と C_2 の交点をすべて求めよ．

2) λ をパラメータとする平面曲線の族を

$$C_\lambda : F_1(X,Y,Z) + \lambda F_2(X,Y,Z) = 0$$

と定義する．次の各々の点について，その点を通るような C_λ を求めよ．また，それが既約であるかどうかを調べよ．

a) $(3 : -2 : 1)$ 　　b) $(1 : -1 : 1)$ 　　c) $(1 : -2 : 1)$ 　　d) $(1 : 1 : 0)$

$\boxed{4}$ 円に内接する六角形の対辺の延長線の交点は一直線上にある．この定理を次の定理を用いて証明せよ．

定理 　C_1，C_2 射影平面内の 3 次曲線とし，C_1 と C_2 の交点は相異なる 9 点 $P_1, \ldots, P_9$ からなるとする．このとき $P_1, \ldots, P_8$ を通る 3 次曲線 D は P_9 も通る．