楕円曲線への自明でない写像を持つ代数曲線について

鍬田 政人

1. はじめに

城崎における代数幾何学シンポジュウムで行った講演でのタイトルは “Curves of genus 2 and their associated Kummer surfaces” というものであったが，実際の講演は Emma Previato 氏の最近のプレプリント [Pre] に刺激され，それに関連し以前より考えていたいくつかの結果をまとめて紹介するというものになった．いずれにせよ，底流にあるのは「楕円曲線に向けた自明でない写像を持つような曲線とはどのようなものであるか」，あるいは、ほぼ同じことだが，「曲線 C のヤコビ多様体 $J(C)$ が楕円曲線を部分多様体として含むのはいつか」という問題である．この問題は１９世紀末にはアーベル積分の楕円積分への還元の問題として捉えられ、盛んに研究されていた．筆者は，アンベール（Georges Humbert）がこの問題のある場合について，その結果を射影幾何学の定理であるのポンスレ（Jean-Victor Poncelet）の定理を用いてエレガントに記述していることは知っていたが（全集[Hum] 参照），[Pre] によればそれより以前にコワレフスカヤ（Sofia Kovalevskaia）も別の場合について得られた結果を，「4次曲線の双接線」という幾何学の言葉で記述しているということであり，非常に驚いた．

この報告では，コワレフスカヤとアンベールの結果のあらすじを紹介し，最後の節では，さらにもう一つの場合について，これら先達の精神に乗っ取り，ポンスレの定理の拡張であるダルブー（Gaston Darboux）の定理を用いた結果を示す．

2. アーベル積分の楕円積分への還元

まず最初にアーベル積分の楕円積分への還元の問題について詳しくみてみる．$f(x)$ を代数方程式 $P(x, y) = 0$ で定まる代数関数とする．もし第一種のアーベル積分

$$u = \int F(x, f(x))\, dx$$

が，二つの有理関数 $\Phi(x)$ と $\Psi(x, y)$ を用いて

$$\xi = \Phi(x, y), \quad \sigma = \sqrt{\xi(1-\xi)(1-c^2\xi)} = \Psi(x, y)$$

と変数変換することにより楕円積分

$$\int \frac{d\xi}{\sigma}$$

で表されるとき，このアーベル積分は楕円積分に還元されたという．これを幾何学的にみると，方程式 $P(x,y)=0$ で定義される代数曲線 C から楕円曲線 $E:\sigma^2=\xi(1-\xi)(1-c^2\xi)$ への写像が存在し，その写像によって微分形式 $d\xi/\sigma$ が $F(x,y)\,dx$ に引き戻されることに他ならない．この還元の問題を具体的に考える場合には C の種数 g と写像 $C\to E$ の次数 d を固定して考えるのが普通である．

アーベル積分の還元の問題はアーベル（Niels Henrik Abel）の1829年の論文 [Ab, p 518] にまで遡る．20世紀初頭までの結果についてはクラゼール（Krazer）の本[Kra] に詳しい解説がある．

ワイエルシュトラス（Weierstrass）の弟子であるケーニヒスベルガー（Leo Königsberger）[Kön] は $g=2$，次数 $d=2$ の場合を考察した．この場合，種数 2 の曲線 C は楕円曲線のガロワ被覆になることから，このような C のを探すことは，超楕円対合以外の自己同型を持つ種数 2 の曲線を捜すことと重なる．後者については井草[Igu]により詳しく研究されている．([IKO]参照.)

コワレフスカヤが扱ったのは $g=3, d=2$ の場合であり，アンベールがポンスレの定理を用いて記述したのは $g=2, d=3$ の場合である．最後の節では $g=2, d=4$ の場合について述べる．

3. コワレフスカヤの仕事

ソフィア・コワレフスカヤ（Софья Ковалевская，Sofia Kovalevskaia）の生誕150周年を記念して行われたシンポジュウムでの講演記録である[Pre] には次のように述べられている．コワレフスカヤは博士論文のためにいくつかの問題を考えていたが，そのうち，直接関係ないと思われていた二つの仕事が実は「部分アーベル多様体の直和に分解するヤコビ多様体」というものを介し結びついていることが次第にわかってきているということである．このあたりの事情を手近にあったコワレフスカヤの伝記をもとにまとめてみる．

ワロンツォーワ（Warontsowa）による伝記「コワレフスカヤの生涯」（東京図書）によると，学問を続けるために偽装結婚しロシア国外に出たコワレフスカヤは，まずハイデルベルグでケーニヒスベルガーに師事し，1870年からベルリンのワイエルシュトラス教授の下で勉強をはじめ．そこで博士号取得のための最初の試みとして「種数 3 のアーベル積分を楕円積分に還元することについて」（後に [Kov1] として出版）を書く．ワイエルシュトラスによれば，このような問題を解くには当時の解析学の最先端を行く非常に難解なアーベル積分の理論を根本的に理解していな

ければならず，コワレフスカヤにしてみれば彼女の能力を知らしめる恰好の問題であった．ワイエルシュトラスは，それより以前に，種数が 2 の場合を自分の弟子である ケーニヒスベルガーに問題として与えており，コワレフスカヤの課題はそれよりさらに難解であったが，彼女はそれを見事に解いてしまった．しかしながら，もし博士論文を提出下としても，女性であるが故に教授になれる見込みのなかったコワレフスカヤは博士論文の提出を急がず，さらにいくつかの難しい研究課題に取り組んだ．その一つが「土星の環の形状に関するラプラスの研究の補足と注解」であり，もう一つが「偏微分方程式の理論」であって，これが後に実際に学位論文となり (1874年)，後世に「コーシー・コワレフスカヤの定理」として知られるようになったものである．これと同時に コワレフスカヤは剛体の回転運動に関する問題もこのときから考えていたようであが，これについてはすぐにはめざましい結果を出すことができなかった．その十数年後の1888年, コワレフスカヤはこの剛体の回転運動の研究 ([Kov2]) で ボルダン（Bordin）賞を受賞することになる．実は，この仕事と最初のに述べたアーベル積分の還元の問題とには深いつながりがあることが最近になってだんだんわかってきているというのである．

コワレフスカヤはアーベル積分の還元の問題に対し，積分の周期の間の関係の考察から結果を得た結果を次のように幾何学的に述べている。

定理 3.1 (Kovalevskaia[Kov1])**.** C を 4 次方程式 $P(x,y)=0$ によって定義される非特異な,したがって種数 3 の平面曲線とする．$f(x)$ を $P(x,f(x))=0$ をみたす代数関数としたとき，アーベル積分

$$u=\int F(x,f(x))\,dx$$

で，次数 2 の有理関数によって楕円積分に還元されるものが存在するための必要十分条件は，C の 28 ある双接線のうち 4 本が一点で交わることである．

上のような 4 次曲線は同次座標を適当にとることにより

$$(z^2-f_2)^2=xy(ax+by)(cx+dy)$$

という形に表せる．ただし f_2 は x,y についての二次の同次多項式である．([Bak, 第VIII章76節]).

4. アンベールの結果

1892年のフランス科学院 (l'Académie des Sciences) のボルダン賞の懸賞課題は「アーベル積分の一般論の幾何学への応用」であった．この課題に応募した論文はアンベールによるたった

一編のみであったが，選者であるポアンカレ (Henri Poincaré) がアンベールの論文のボルダン賞受賞に際した講評の中で次のように述べている．

> 確かに応募したのはたった一編であったが，科学院のねらいはまさに的中した．ここに示されている諸結果は非常に重要なものであり，これが多数の興味ある問題の解決につながる．（アンベール全集より．筆者訳.）

この論文の中でアンベールはクンマー（Kummer）曲面（射影空間内の 4 次曲面で，16 この孤立特異点を持つもの）と，その中に含まれる曲線について研究している．現代流に述べると，種数 2 の曲線 C のヤコビ多様体 $J(C)$ の中に C の点を一つ定めることにより，C が埋め込めるが，これにより定まる因子（テータ因子）の 2 倍を利用することにより，$J(C)$ から $\mathbf{P}^3$ への写像が得られる．この写像は 2 対 1 であり，その像がクンマー曲面である．このとき空間内の平面でクンマー曲面との交わりが（多重度 2 の）円錐曲線（二次曲線）となるものが 16 個あり，クンマー曲面の 16 この特異点のうち 6 個がその平面の上にのっている．これを 16-6 配置と呼ぶ．もとの種数 2 の曲線 C はこの円錐曲線の二重被覆で,その上の 6 個の特異点で分岐するものとして再現される．

アーベル曲面 $J(C)$ が二つの楕円曲線の積 $E_1 \times E_2$ と同種になるとき，アンベールはこのクンマー曲面は楕円的であると呼び，$J(C)$ と $E_1 \times E_2$ の間の同種写像の次数を楕円的クンマー曲面の不変量と呼んでいる．

種数 2 の曲線 C から楕円曲線 E への次数 n の全射があったとすると，引き戻し

$$\varphi^* : \mathrm{Pic}^0(E) = E \to \mathrm{Pic}^0(C) = J(C)$$

が考えられる．もし φ が $C \xrightarrow{\varphi'} E' \xrightarrow{\phi} E$ (E' は楕円曲線) と分解するようなことがなければ，φ^* は単射であり $F = J(C)/E$ はまた楕円曲線になる．C の一点を固定し，それにより埋め込み $C \to J(C)$ をつくると

$$\psi : C \to J(C) \to F = J(C)/E$$

もまた次数 n の写像となることが示される．これより $\psi^* : F \to J(C)$ が得られ，$E \times F \to J(C)$ は次数 n^2 の同種写像となる．このことから，種数 2 のアーベル積分の還元の問題は「いつクンマー曲面が楕円的になるか」という問題に帰着する．

同種写像 $E \times F \to J(C)$ の核を Δ とすると Δ は位数 n^2 の有限群である．逆に，$E \times F$ の位数 n^2 の部分群 Δ を適当にとると，アーベル曲面 $E \times F/\Delta$ がなんらかの種数 2 の曲

線のヤコビ多様体になるようにできるのではないかと考えるのは自然である．これについては Frey-Kani[FK] が現代的な視点から詳しく考察している．([HLP] も参照.)

アンベールは不変量 9 の楕円的クンマー曲面を特徴づける定理を次のように述べている．

定理 4.1 (Humbert[Hum])**.** 不変量 9 の楕円的クンマー曲面は，それに含まれる円錐曲線の上の 6 個の二重点を適当に二つの三点の組にわけることにより，最初の三点からなる三角形に内接しもう一つの三点からなる三角形に外接するような円錐曲線が存在するようにできる．また，この逆も成り立つ．

このとき二つの円錐曲線はポンスレの関係にあるというのであるが，これは次の射影幾何の定理による．

定理 4.2 (Poncelet[Pon])**.** Q_1, Q_2 を射影平面上の二つの円錐曲線とする．もし Q_1 に外接し，Q_2 に内接する n 角形が存在したとすると，Q_1 の任意の点 P_0 からはじめて P_0 を通る Q_2 の接線 T_1 と Q_1 が再び交わる点を P_1 とし，P_1 から Q_2 への接線と Q_1 との交点を P_2 とし，という操作（ポンスレの操作）を n 回繰り返してえられる点 P_n は P_0 と一致する．

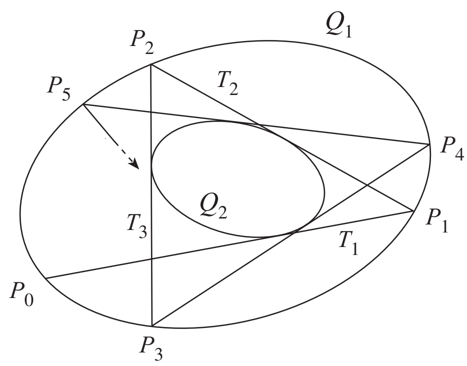

図 1．ポンスレの操作

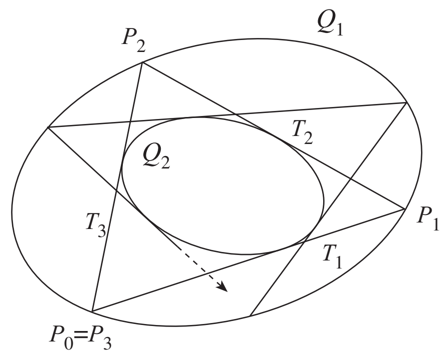

図 2．三角形の場合

上の定理の仮定が成り立つとき，すなわち Q_1 に外接し Q_2 に内接する n 角形 $P_1P_2\cdots P_n$ が存在するとき，順序対 $(Q_1,\ Q_2)$ は n-ポンスレ関係にあるという．したがって，アンベールの定理はクンマー曲面に含まれる円錐曲線（Q_1 の役割を果たす）に対して，これと3-ポンスレ関係にある円錐曲線である条件をみたすものが存在することが，$J(C)$ が楕円曲線の積と次数 9 の同種であるための必要十分条件であると主張している．（ただし，アンベールの定理の状況を実平面上で表そうとすると，上の図のような楕円ではなく双曲線を用いることが必要になる.）

アンベールの定理に出てくる円錐曲線の存在には，実はある種の対称性がある．このような円錐曲線 Q_2 が存在することと，先に述べたもう一つの写像 $\psi C \to F$ に関連して，最初の三点からなる三角形に外接し，もう一つの三点からなる三角形に内接するような円錐曲線 Q_2' が存在することは同値である．さらにこのとき $(Q_2,\ Q_2')$ も 順序を逆にした $(Q_2,\ Q_2')$ もともに 3-ポンスレ関係にあることもわかる．

ポンスレの定理の証明の背後には楕円曲線とその n 等分点が潜んでいる．これに関しては最近は日本語による解説もよく見かける．詳しいことについては [BKOR][Tra] なども参照されたい．

5. $g = 2,\ d = 4$ の場合

C を種数 2 の曲線とし，C からある楕円曲線 E に自明でない写像 $\varphi : C \to E$ で次数が 4 のものが存在したとする．このとき φ は楕円曲線の同種写像 $E' \to E$ と次数 2 の写像 $C \to E'$ との合成には分解されることはないと仮定する．また C の超楕円対合をι，E の (-1)-倍写像を $[-1]$ で表したとき次の図式が可換になるとする．

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\varphi} & E \\ {\scriptstyle \iota}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [-1]} \\ C & \xrightarrow{\varphi} & E \end{array}$$

すると φ は次数 4 の写像 $\bar{\varphi} : C/\langle\iota\rangle \to E/\langle[-1]\rangle$ を誘導する．$E/\langle[-1]\rangle$ は射影直線 $\mathbf{P}^1$ と同型であるから $\bar{\varphi}$ は $\bar{\varphi} : C/\langle\iota\rangle$ 上の効果的で機転を持たない次数 4 の因子のペンシル (一次元族) を与える．$\bar{\varphi} : C/\langle\iota\rangle$ は先の場合と同じように，クンマー曲面に含まれる円錐曲線として自然に実現されるので，このペンシルに対して次に述べる，ポンスレの定理の拡張であるダルブーの定理を用いることができる．（Trautmann[Tra] 参照.）

定理 5.1 (Darboux[Dar])**.** Q を円錐曲線とし，Λ を効果的で基点を持たない次数 n の Q 上の因子のペンシルとする．Λ の任意の因子 $D = P_1 + \cdots + P_n$ に対して Q の P_i における接線を L_i とし，これらの n 個の接線の間の $n(n-1)/2$ 個の交点の集合を $S(\Lambda)$ とする．すると D が Λ 内を動くとき $S(\Lambda)$ は次数 $n-1$ の曲線を描く．

$n = 4$ の場合，$S(\Lambda)$ は三次曲線になるが，Λ が一般のペンシルの場合にはこの曲線は非特異である．一方，ポンスレの定理のように，Λ の因子の 4 点で接する四角形の頂点が別の円錐曲線を描くときは，ダルブーの定理に現れる三次曲線は二次曲線と直線に分解されているとみることができる．

Satgé[Sat] によれば Λ が $2P_1+2P_2$ という形の因子を含めば $S(\Lambda)$ に特異点が現れるが，Kuhn[Kuh] によれば，ここで考えている $\bar{\varphi}$ より得られる因子のペンシルは $2P_1+2P_2$ という形の因子を一つだけ含む．したがって，いま考えている場合のダルブーの三次曲線 $S(\Lambda)$ は二重点を一つだけ持つ曲線であることがわかる．さらにこの曲線は次の性質を持つ．$W_1, W_2, \ldots, W_6$ を C の 6 個のワイエルシュトラス点に対応する $C/\langle\iota\rangle$ の点とし，T_i で W_i における Q の接線を表すとすると，$W_1, W_2, \ldots, W_6$ は三つの組 (W_1，W_2)，(W_3，W_4)，(W_5，W_6) に分かれ，

(1) $S(\Lambda)$ は $T_1, T_2, \ldots, T_6$ に接する．

(2) $S(\Lambda)$ と T_i との接点を P_i とすると，三本の直線 P_iP_{i+1} $(i=1,3,5)$ はそれぞれ Q に接する．

(3) $S(\Lambda)$ は P_iP_{i+1} と Q との接点を通る．

逆に，C が上のような性質 (1)，(2)，(3) をみたす三次曲線で通常二重点を持つものが存在すれば，C からある楕円曲線への 4 次の写像が存在することもわかる．

Kani-Schanz[KS] の結果などから，楕円曲線 E を一つ任意に固定したとき，種数 2 の曲線の一次元の族 $\{C_t\}$ で 4 次の写像 $\varphi_t : C_t \to E$ 我存在することがわかる．この $\{C_t\}$ と φ_t を具体的に書き表すことや $J(C_t)/E$ を求めることも，上のような幾何学的考察をもとにしてできる．これらのことは別の機会に詳しく述べることにしたい．t ヲいろいろ動かしたとき $J(C_t)/E$ が再び（代数閉包上）E と同型になることがある．最後にこのことを用いた数論的な興味もつながる結果を一つだけ述べて終わることにする．

定理 5.2. E を代数体 k 上定義された楕円曲線で，その j-不変量 $j(E)$ が 0 または 1728 でないものとする．このとき k 上定義された種数 2 の曲線 C で，そのヤコビ多様体 $J(C)$ と $E \times E^{3(j(E)-1728)}$ の間に k 上定義された次数 16 の同種写像が存在するものがある．ここで E^d は E の d による二次ひねりを表す．

参考文献

[Ab] Niels Henrik Abel, *Œuvres complètes. Tome II*, Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1992, Suivi de "Niels Henrik Abel: sa vie et son action scientifique" par C.-A. Bjerknes. [Followed by "Niels Henrik Abel: his life and his scientific activity" by C.-A. Bjerknes] (1884), Edited and with notes by L. Sylow and S. Lie, Reprint of the second (1881) edition.

[Bak] H. F. Baker, *An introduction to the theory of multiply periodic functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1907.

[BKOR] H. J. M. Bos, C. Kers, F. Oort, and D. W. Raven, *Poncelet's closure theorem*, Exposition. Math. **5** (1987), no. 4, 289–364.

[Dar] Gaston Darboux, *Gómetrie Analytique*, Paris, 1917.

[FK] Gerhard Frey and Ernst Kani, *Curves of genus* 2 *covering elliptic curves and an arithmetical application*, Arithmetic algebraic geometry (Texel, 1989), Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1991, pp. 153–176.

[HLP] Everett W. Howe, Franck Leprévost, and Bjorn Poonen, *Large torsion subgroups of split Jacobians of curves of genus two or three*, Forum Math. **12** (2000), no. 3, 315–364.

[Hum] Georges Humbert, *Sur les surfaces de Kummer elliptiques*, Œuvres de G. Humbert (P. Humbert and G. Julia, eds.), vol. II, Gauthier-Villars, Paris, 1936, pp. 233–267.

[Igu] Jun-ichi Igusa, *Arithmetic variety of moduli for genus two*, Ann. of Math. (2) **72** (1960), 612–649.

[IKO] Tomoyoshi Ibukiyama, Toshiyuki Katsura, and Frans Oort, *Supersingular curves of genus two and class numbers*, Compositio Math. **57** (1986), no. 2, 127–152.

[Kön] Leo Königsberger, *Über die Rduction hyperelliptischer Integrale auf elliptische*, J. für Math. **85** (1878).

[Kov1] Sophie Kowalevsky, *Über die Reduction einer bestimmten Klass abel'scher Integrale dritten Ranges auf elliptische Integrale*, Acta Math. **4** (1884), 393–414.

[Kov2] Sophie Kowalevsky, *Mémoire sur un cas particuliere de la rotation d'un corps solide atour d'un points fixe*, Acta Math. **12** (1889), 177–232.

[Kra] Adolf Krazer, *Lehrbuch der Thetafunktionen*, Teubner, Leipzig, 1903.

[KS] E. Kani and W. Schanz, *Modular diagonal quotient surfaces*, Math. Z. **227** (1998), no. 2, 337–366.

[Kuh] Robert M. Kuhn, *Curves of genus* 2 *with split Jacobian*, Trans. Amer. Math. Soc. **307** (1988), no. 1, 41–49.

[Pon] Jean-Victor Poncelet, *Traité des proprieétés projectives des figures*, Paris, 1822.

[Pre] Emma Previato, *Reduction theory, elliptic solitons and integral systems*, To appear in CRM Proceedings and Lecture Notes, American Mathematical Society, 2001.

[Sat] Ph. Satgé, *Questions arithmétiques liées au théorème de Poncelet*, Number theory (Halifax, NS, 1994), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, pp. 359–373.

[Tra] G. Trautmann, *Poncelet curves and associated theta characteristics*, Exposition. Math. **6** (1988), no. 1, 29–64.

〒243-0292 **神奈川県厚木市下荻野**1030, **神奈川工科大学一般科**

E-mail address: `kuwata@gen.kanagawa-it.ac.jp`