「復習問題」略解

$\boxed{1}$ a) 変形されてできる階段行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これより，A の階数は 3.

b) $c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + c_3\vec{a}_3 + c_4\vec{a}_4 = \vec{0}$ の解を求めると，a) の階段行列を参照して $c_1 = t, c_2 = -2t, c_3 = t, c_4 = 0$（$t$ は任意の実数）という解を得る．ここで $t = 1$ とおけば，$\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \vec{0}$ という 1 次関係式を得る．したがって，$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ は 1 次従属.

$\boxed{2}$ $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$, $\vec{a}_5$ を並べてできる行列 $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -4 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -7 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 7 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ を基本変形によって階段行列に変形すると，（計算は少々複雑で，手計算でやる場合は工夫が必要だが）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる．この行列の階数は 4 なので，$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$，$\vec{a}_5$ のうち，1 次独立なものの最大個数は 4．基本変形の結果から，問題 1 と同様にして，$3\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \vec{0}$ が得られ，これより，$\vec{a}_3 = -2\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ となる． $\vec{a}_3$ を除いた，$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4$，$\vec{a}_5$ は 1 次独立なベクトルの組となる.

$\boxed{3}$ a) 基本変形後の行列を参照して，$c_4 = t$ とおくと，$c_1 = 2t, c_2 = -5t, c_3 = -2t$ となる．$t = 1$ とおけば，$2\vec{a}_1 - 5\vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 + \vec{a}_4 = \vec{0}$ という 1 次関係式があることがわかる．したがって，$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ は 1 次従属.

b) b) で求めた 1 次関係式より $\vec{a}_4 = -2\vec{a}_1 + 5\vec{a}_2 + 2\vec{a}_3$ とあらわせるので，$\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4 \rangle = \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \rangle$．また A の基本変形は $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ が 1 次独立であることも示しているので，$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ は $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4 \rangle$ の基底となる.

c) c) で求めた基底は 3 つのベクトルからなるので，$\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4 \rangle$ の次元は 3.

$\boxed{4}$ $P = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$\boxed{5}$ a) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) これは，対角化不可能な行列でした．これはこちらのミスで，この問題は今回の試験の範囲外です.

$\boxed{6}$ $y = -\dfrac{1}{2}x$ と平行なベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ はこの対称移動で不変であり，$y = -\dfrac{1}{2}x$ と垂直なベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は $-\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に移る．そこで，$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ とおき，求める行列を A とおくと $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる．ゆえに，

$$A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{7}$ a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ だから，$\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ は $\mathbf{R}^3$ の基底である.

b) $P^{-1}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) b) と同じ．（タイプミス）

d) 固有ベクトル $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ に対する固有値がそれぞれ 1，−1，2 であるから，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ となるはず.

e) $A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

$\boxed{8}$ a) $M = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$

b) 固有値 1 の固有ベクトルを求めると $t\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ となる．各社のシェアは 3 : 3 : 5 となる．すなわち，約 27%, 27%, 45% の割合となる.