

線形代数 II・数学 II — 期末試験

2010 年 1 月 26 日

時間 60 分

- 筆記用具以外の持ち込みは不可.
- 最終的な答えだけを書くのではなく途中の計算や説明も書くこと. これがない場合, 大幅な減点をすることもある.

1 \mathbf{R}^4 のベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ を

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

とする. 以下の問に答えよ. ただし, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ を並べてできる 4 次の正方行列 A は行に関する基本変形によって下のように変形される.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & -3 & 2 & -7 \\ 1 & 5 & -7 & 9 \\ 3 & 4 & -3 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ は一次独立かどうか判定せよ. もし, 一次従属ならば, これらのベクトルの間の一次関係式を求めよ.
- $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ で生成される部分空間 $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4 \rangle$ の基底を (1 つ) 求めよ.
- 部分空間 $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4 \rangle$ の次元をもとめよ.

2 A を 3 行 3 列の行列とする. A の固有値は 1, 2, 3 であり, それぞれに対する固有ベクトル

は $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ であるとする. また, T を \vec{x} を $A\vec{x}$ に移す \mathbf{R}^3 の

1 次変換とする.

- 3 つのベクトルの組 $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ は \mathbf{R}^3 の基底になることを示せ.
- 基底 $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ に関する 1 次変換 T の表現行列を求めよ. この行列を B とする.
- 3 つのベクトル $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ を並べてできる行列を P とするとき, P^{-1} を求めよ.
- 行列 A, B, P の間にはどのような関係があるか.
- A を求めよ.

【裏に続く】

3] $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ とする.

- a) A を対角化せよ.
- b) A^n を求めよ.

4] あるインターネット・サービスのマーケットには A 社, B 社, C 社の 3 社が参入している. A 社の契約者は 1 期後には, 70% が契約を継続するが, 20% は B 社に変更し, 10% は C 社に変更する. また, B 社の契約者は 1 期後には, 80% が B 社との契約を継続するが, 10% は A 社に変更し, 10% は C 社に変更する. さらに, C 社の契約者は 1 期後には, 70% が C 社との契約を継続するが, 20% は A 社に変更し, 10% は B 社に変更する.

- a) 第 n 期後の A 社のシェアを a_n , B 社のシェアを b_n , C 社のシェアを c_n としたとき. ある行列 M を用いて

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

と表せる. 行列 M を求めよ.

- b) このような動向が長期間にわたって続くとすると, 各社のマーケットシェアは一定に近づく. シェアを表すベクトルは契約者の動向を表す行列 M の固有値 1 の固有ベクトルとなることを利用し, 各社のシェアを求めよ.