

応用問題

[1] 衛星放送のマーケットには V 社と W 社の 2 社がある. V 社の契約者は 1 期後には, 60 % が契約を継続するが, 40 % は W 社に変更する. また, W 社の契約者は 1 期後には, 80 % が W 社との契約を継続するが, 20 % は V 社に変更する. このとき次の問に答えよ.

- a) 第 n 期の V 社のシェアを v_n , W 社のシェアを w_n とする. このとき, ベクトル $\begin{pmatrix} v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}$ はある行列 M とベクトル $\begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ を用いて $\begin{pmatrix} v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ と表わされる. 行列 M をもつめよ.
- b) 上で求めた行列 M の固有値と固有ベクトルを求めよ.
- c) 行列 M を対角化せよ.
- d) M^n を求めよ.
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n$ を求めよ. それを用いて, 第 1 期のマーケットシェアがどうであれ長期的にはシェアはある一定の割合に近づくことを示せ.

[2] 2 つの壺が A, B があり, A には赤玉が 2 個, B には白玉が 2 個入っている. それぞれの壺から, 無作為に 1 個ずつ玉を取り出して交換して壺へ戻すことにする. このような操作を何回も繰り返したとき A の壺の中にそれぞれ白玉が 1 個もない, 1 個ある, 2 個ある確率を求めよ.

[3] p, q は $0 \leq p \leq 1, 0 \leq q \leq 1$ みたす実数とし, $M = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$ とおく. M は固有値 1 を持つことを示せ. また, 固有値 1 に対する固有ベクトルを求めよ.

[4] ある歌手が, 「私は引退する」と誰かに打ち明けた. その人はまた誰かにこの告白を伝え, それを聞いた人はまた誰かに伝える. このようにして, 「引退する」というニュースは広がっていく. ある人が次の人に伝えるとき, 聞いた内容を逆に伝える確率が少しでもあるとすると, たくさんの人を経由した結果, 最初に歌手のいったことが正しく伝えられる確率はいくらになるか.

[5] あるレンタカーの会社には, 3 つの営業所, 東, 西, 南がある. 客はどの営業所で車を借りることもできるし, どの営業所に戻してもよい. 調査によると東営業所で借りた客の 8 割が東営業所に戻し, 1 割ずつが西と南営業所に戻すという. 西営業所で借りた客はそれぞれ, 3 割, 2 割, 5 割の割合で, 東, 西, 南営業所に戻す. また, 南営業所で借りた客はそれぞれ, 2 割, 6 割, 2 割の割合で, 東, 西, 南営業所に戻すという. このような状況が続くとした場合, レンタカーの配車を 3 つの営業所にどのような割合ですればよいか.

[6] In the Land of Oz they never have two nice days in a row. If they have a nice day, they are just as likely to have snow as rain the next day. If they have snow (or rain), they have an even chance of having the same the next day. If there is a change from snow or rain, only half of the time is this a change to a nice day.

- a) Find the probability that the third day is a nice day, knowing that it was sunny on the first day.
- b) More generally, find the probability that the n th day is a nice day, knowing that it was fine on the first day.
- c) Generally speaking, what is the probability to have a nice day in the land of Oz ?