❦ 3. 部分空間とその基底　　2010年度後期　線形代数 II（木 3 限）

学生証番号 : ________________　氏名 : ____________________

$\boxed{1}$ 次のそれぞれの 2 次元数ベクトル空間 $\mathbf{R}^2$ の部分集合は，$\mathbf{R}^2$ の部分空間とはならない．それぞれについて，部分空間とはならない理由を反例をあげることにより示せ．

a) $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, 2x + 3y = 1 \right\}$

b) $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, x^2 - y^2 = 0 \right\}$

c) $V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, x \geqq 0, y \geqq 0 \right\}$

$\boxed{2}$ 4 つの 3 次元ベクトル $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$， $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$， $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$， $\vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ で生成される部分空間 $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4 \rangle$ を V とする．V の次元 $\dim V$ と V の基底を求めよ．

$\boxed{3}$ 連立 1 次方程式 $\begin{cases} -x + 2y + 5z + 2w = 0 \\ x - y + z + w = 0 \\ x + 7z + 5w = 0 \end{cases}$ をみたす 4 次元ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ 全体からなる $\mathbf{R}^4$ の部分集合を V とする.

a) V は $\mathbf{R}^4$ の部分空間であることを示せ.

b) V の次元と基底を求めよ.