復習問題

$\boxed{1}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3x-1}}\,dx$ を以下の方法で求めよ.

a) $3x-1=t$ とおいて求めよ.

b) $\sqrt{3x-1}=t$ とおいて求めよ.

$\boxed{2}$ 次の不定積分を求めよ.

a) $\displaystyle\int x(3x+2)\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x\log x}\,dx$

c) $\displaystyle\int (x+1)e^x\,dx$

d) $\displaystyle\int \log(x+1)\,dx$

$\boxed{3}$ つぎの 2 変数関数について, 各変数に関する偏微分を計算せよ.

a) $f(x,y)=x^4-4x^2y^2+3xy^3-y^4+3$

b) $f(x,y)=(x+2y^2+1)^3$

c) $f(x,y)=x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{3}{5}}$

d) $f(x,y)=\log(1+x^2+y^2)$

$\boxed{4}$ 次の関数の臨界点を求め, 各臨界点において極大・極小を判定せよ.

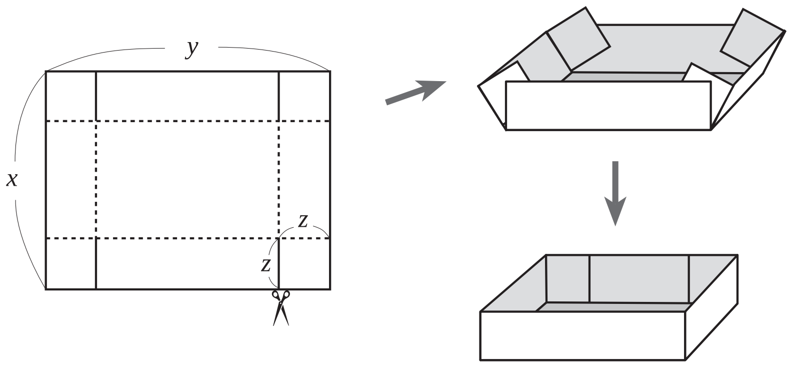
a) $f(x,y)=x^3-6x^2+x^2y^2-y^2$

b) $f(x,y)=\dfrac{x}{1+x^2+y^2}$

c) $f(x,y)=(x-y)e^{xy}$

$\boxed{5}$ 条件 $x^2+xy+y^2=1$ のもとで, $xy$ の最大値と最小値を求めよ.

$\boxed{6}$ たて $x$ cm, よこ $y$ cm のボール紙を使い, 図のように四隅に $z$ cm の切り口をいれ, $z$ cm 四方の のりしろを作って折り曲げ, のりで貼ることにより, ふたのない箱をつくる. このとき, 使用するボール紙の面積を一定値 $a^2$ に保ったまま, 箱の容積を最大にすることを考える. ただし, $a$ は正の定数とする.




a) 箱の容積を $x$ と $z$ の 2 変数関数とみて, それを $V(x,z)$ と書く. $V(x,z)$ を具体的に書き表せ.

b) 関数 $V(x,z)$ を領域 $D=\{(x,z)\mid 0<2z<x, 2xz<a^2\}$ 上で考える. $V(x,z)$ の偏微分を計算し, $D$ 内における臨界点（すべての偏微分が 0 になる点）を求めよ.

【裏につづく】

c) 上で求めた臨界点において $V(x,z)$ が最大になることは認める．$V(x,z)$ の $D$ における最大値を求めよ．また，そのときの箱の寸法はどのようなものであるかを述べよ．

d) 箱の容積を $x$, $y$, $z$ の 3 変数関数とみて，$V(x,y,z)$ と書く．Lagrange の乗数法を用い，$V(x,y,z)$ が $xy = a^2$ という拘束条件の下で最大になるような $x, y, z$ を求めよ．

$\boxed{7}$ 底面の縦と横の長さがそれぞれ $x$ と $y$ で高さが $z$ の，上面に蓋のない直方体の箱 $B$ を考える．

a) $B$ の表面積が一定値 $S$ であるとするとき，$B$ の体積 $V$ を $x$ と $y$ の関数として表せ．

b) 表面積一定の条件の下で体積 $V$ が最大になるのはどのようなときか．

$\boxed{8}$ $\sqrt{7} = \dfrac{5}{2}\sqrt{1 + \dfrac{12}{100}}$ という表示と $\sqrt{1+x}$ の 2 次近似の式を用い $\sqrt{7}$ の近似値を求めよ．また，このようにして得られた近似値と $\sqrt{7}$ の値とは小数第何位まで一致するといえるか．

$\boxed{9}$ 漸近展開を用いて次の極限を求めよ．

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \log(1+x)}{e^x - 1 - x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{e^x - 1}$

2010 年 12 月 22 日