

## Lagrange の乗数法

## 条件付極値問題

拘束条件  $g(x, y) = 0$  の下で、関数  $f(x, y)$  の極値を求めたい。このとき、新たに第3の変数  $\lambda$  を導入し、3変数関数  $L(x, y, \lambda)$  を

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

と定義する。 $(\lambda$  は Lagrange の乗数と呼ばれ  $L(x, y, \lambda)$  は Lagrange 関数と呼ばれる。) このとき、 $L(x, y, \lambda)$  の(無条件での)極値を求めると、 $g(x, y) = 0$  の下での  $f(x, y)$  の極値が求まることが知られている。したがって、極値を求めるには

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = g(x, y) = 0 \end{cases}$$

を解けばよい。

例題 直線  $lx + my = n$  上の点と原点  $O$  との距離の最小値を求めよ。

解 拘束条件  $g(x, y) = lx + my - n = 0$  の下で距離の2乗  $f(x, y) = x^2 + y^2$  の最小値を求めればよい。そこで  $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(lx + my - n)$  とおき、偏微分を計算する。

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = 2x - \lambda l = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = 2y - \lambda m = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = lx + my - n = 0 \end{cases}$$

第1式を  $\lambda$  について解き、第2式に代入して整理すると

$$mx - ly = 0$$

が得られる。これと第3式を  $x, y$  についての連立1次方程式と見て解くと

$$x = \frac{ln}{l^2 + m^2}, \quad y = \frac{mn}{l^2 + m^2}$$

を得る。本来、このままではこの  $x, y$  で  $f(x, y)$  が極小になるか極大になるかは機械的に判断できないが、この問題では図形的に容易に最小値だけが存在し、最大値が存在しないことがわかる。そこで、上の値を  $f(x, y)$  に代入して、 $f(x, y)$  の最小値は  $\frac{n^2}{l^2 + m^2}$  となる。したがって距離の最小値は  $\frac{|n|}{\sqrt{l^2 + m^2}}$ 。

- 1 条件  $x^2 + y^2 = 1$  のもとで,  $3x^2 + 2xy + y^2$  の最大値と最小値を求めよ.
- 2 条件  $x^2 + 2xy + 4y^2 = 1$  のもとで,  $f(x, y) = xy$  の最大値と最小値を求めよ.
- 3 【効用最大化問題】 消費者の効用関数が  $u(x, y) = x^\alpha y^\beta$  で与えられているとする. このとき, 所得制約式  $p_1x + p_2y = I$  のもとで  $u(x, y)$  を最大にする  $(x, y)$  を Lagrange の乗数法により求めよ.
- 4 【費用最小化問題】 消費者の効用関数  $u(x, y) = x^\alpha y^\beta$  をある一定レベル  $u_0$  に保ち, この効用レベルで支出  $S(x, y) = p_1x + p_2y$  を最小にしたい. そのような  $(x, y)$  を Lagrange の乗数法により求めよ.
- 5 厚紙を用いて図のような中仕切りがあるふたつきの箱をつくる. 使用する厚紙の面積が一定値  $S$  であるとき, 容積  $V$  が最大になるような箱の寸法を求めよ. またその時の箱の容積を求めよ.

