漸近展開

$x=0$ のまわりで定義された関数 $\varepsilon(x)$ が，$x\to 0$ としたとき 0 に近づくなら，すなわち $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$ が成り立つなら，$\varepsilon(x)$ は**無限小**であるという．例として，$n>0$ のとき，関数 x^n は無限小である．また，n が大きくなればなるほど，x^n が 0 に近づく速さが速くなる．そこで，$\varepsilon(x)$ が n **次より高次の無限小**であることを $\lim_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon(x)}{x^n}=0$ と定義する．いま，$f(x)$ と $g(x)$ の差が n 次より高次の無限小であるとき，これを $f(x)=g(x)+o(x^n)$ と書く．これは $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-g(x)}{x^n}=0$ であることを表す略記法である．

$$f(x)=(n \text{ 次の多項式})+o(x^n)$$

という形の式を $f(x)$ の $x=0$ のまわりでの**漸近展開**と呼ぶ．このとき通常は $o(x^n)$ は「x^{n+1} 以上の項」をひとくくりにしたものと考えて差し支えない．$f(x)$ が $x=0$ で n 階微分可能であるとき，$f(x)$ は

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\dots\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

という漸近展開をもつことが証明できる．以下はこれを用いてつくられた漸近展開である．一般の関数の漸近展開はこれらの式から和・差・積・商および合成の操作を組み合わせて求めることができる．

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-\dots+(-1)^nx^n+o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$$

1 次の関数の $x=0$ のまわりの漸近展開を（ ）内の次数の項まで求めよ．

a) $\sqrt{1-x}$ （x^4 の項まで）　b) $\dfrac{1}{1+x^2}$ （x^6 の項まで）　c) $\dfrac{x}{1+x^3}$ （x^7 の項まで）

d) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ （x^6 の項まで）　e) $\sqrt[3]{1+x^3}$ （x^9 の項まで）　f) $\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ （x^4 の項まで）

g) $e^{-x}\sin x$ （x^4 の項まで）　h) $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ （x^5 の項まで）　i) $\log(1+\sin x)$ （x^4 の項まで）

2 漸近展開を用いて次の極限を求めよ．

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\log(x+1)}{x^2}$　b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{xe^x-x-x^2}{x-\log(1+x)}$　c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}$　e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{1+x}-\sin x}{1-\cos x}$　f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\log(1+x)}\right)$

2010 年 12 月 15 日