高次微分を用いた近似計算

関数 $f(x)$ において $x$ を微少量 $h$ としたとき，$f(h)$ の値の近似値を求めることを考える．一般に，近似値を計算するとき，誤差の大きき差がどれくらいの範囲にあるかが予めわかってないと意味がない．次に述べる**平均値の定理**と呼ばれる定理を用いると，誤差がある範囲内に収まっていることを示すことができる．

> **平均値の定理**　関数 $f(x)$ が $a \leqq x \leqq b$ の範囲で微分可能ならば
> $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$
> となる $c$ が $a < c < b$ の範囲に少なくとも一つ存在する．

ここで，$a=0$，$b=h$ とおき，分母を払って整理すると上の式は $f(h) = f(0) + f'(c)h$ と書き換えられる．

さて，ここで $f(x)$ は何回でも微分可能な関数とする．いま，$f(x)$ の $n-1$ 階導関数 $f^{(n-1)}(x)$ に対し $a=0$，$b=h$ として平均値の定理を適用すると

$$f^{(n-1)}(h) = f^{(n-1)}(0) + f^{(n)}(c)h$$

をみたす $c$ が $a < c < b$ の範囲に少なくとも一つ存在することが示される．ここで，$h$ を変数と見て，0 から $h$ まで積分する，すなわち，

$$\int_0^h f^{(n-1)}(x)\,dx = \int_0^h \left(f^{(n-1)}(0) + f^{(n)}(c)x\right)dx$$

を計算し，左辺の $-f^{(n-2)}(0)$ を右辺に移項すると，

$$f^{(n-2)}(h) = f^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0)h + \frac{1}{2}f^{(n)}(c)h^2$$

が得られる．これを繰り返すと，

$$f^{(n-3)}(h) = f^{(n-3)}(0) + f^{(n-2)}(0)h + \frac{1}{2}f^{(n)}(0) + \frac{1}{3!}f^{(n)}(c)h^3$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(0)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}h^n$$

が得られる．これはすなわち，$f(0) + f'(0)h + \dfrac{f''(0)}{2!}h^2 + \dfrac{f'''(0)}{3!}h^3 + \cdots + \dfrac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}h^{n-1}$ を $f(h)$ の近似値としたとき，真の値と近似値の間の差 $R_n(h)$ は

$$R_n(h) = f(h) - \left(f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(0)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{n!}h^{n-1}\right) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}h^n$$

となることを示している．ここに登場する $c$ は $0 < c < h$ の間にある数であること以外は何もわからないのであるが，いま $f^{(n)}(x)$ の $0 \leqq x \leqq h$ における最大値，最小値をそれぞれ $M$，$m$ とすると，少なくとも

$$\frac{m}{n!}h^n \leqq R_n(h) \leqq \frac{M}{n!}h^n \qquad (*)$$

となることはわかる．ここまでのことは，次のようにまとめられる．

【裏につづく】

$f(x)$ を何回でも微分可能な関数とし，$h$ を正の数とする．$f(h)$ は

$$f(h) \fallingdotseq f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(0)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{n!}h^{n-1}$$

と近似でき，その誤差 $R_n(h) =$（左辺）$-$（右辺）は

$$\frac{m}{n!}h^n \leqq R_n(h) \leqq \frac{M}{n!}h^n$$

をみたす．ただし，$m$，$M$ は $f^{(n)}(x)$ の $0 \leqq x \leqq h$ における最小値，最大値である．

例 $\sqrt{65} = \sqrt{64+1} = 8\sqrt{1+\frac{1}{64}}$ なので $f(x) = \sqrt{1+x}$ とおいて 上の近似式を用いる．ここでは $n = 3$，$h = 1/64$ として近似値とそのときの誤差を求めてみる．先ず微分を計算すると，

$$f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}, \qquad f''(0) = \frac{-1}{4(1+0)^{3/2}} = -\frac{1}{4}, \qquad f'''(x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}}$$

となる．したがって，近似値は

$$\sqrt{65} = 8\sqrt{1+\frac{1}{64}} \fallingdotseq 8\left(f(0) + f'(0)\frac{1}{64} + \frac{f''(0)}{2!}\left(\frac{1}{64}\right)^2\right) = 8.0622558\ldots$$

また，$x \geqq 0$ のとき，$(1+x)^{5/2} \geqq (1+0)^{5/2} = 1$ であるから，

$$0 \leqq f'''(x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}} \leqq \frac{3}{8(1+0)^{5/2}} = \frac{3}{8}$$

を得る．（すなわち，$f'''(x)$ は $x = 0$ のとき最大値 $3/8$ をとる．一方，最小値については正確な値はよくわからないが，0 以上であることはすぐにわかる．この問題ではそれで十分である．）したがって，近似の誤差は，上の式を用いて

$$0 \leqq 8\,R_3\left(\frac{1}{64}\right) \leqq 8\frac{\left(\frac{3}{8}\right)}{3!}\left(\frac{1}{64}\right)^3 \fallingdotseq 0.00000190\ldots$$

と評価できる．すなわち，

$$8.0622558\ldots \leqq \sqrt{65} \leqq 8.0622558\ldots + 0.0000019\ldots = 8.0622577\ldots$$

となる．これより，$\sqrt{65}$ の小数点以下第 5 位までの値は 8.06225 であることがわかる．

$\boxed{1}$ $\sqrt{26}$ の値を小数点以下 3 桁まで求めよ．

$\boxed{2}$ a) $\alpha$ を正の実数とするとき，$1+\alpha$ の 立方根 $\sqrt[3]{1+\alpha}$ を $1 + \dfrac{\alpha}{3} - \dfrac{\alpha^2}{9}$ で近似したときの誤差の範囲を評価せよ．

b) $\sqrt[3]{9} = 2\sqrt[3]{1+\frac{1}{8}}$ という表示と a) の近似式を応用して $\sqrt[3]{9}$ の近似値を計算せよ．また，このようにして得られた近似値と $\sqrt[3]{9}$ の値とは小数第何位まで一致するといえるか．

2010 年 12 月 8 日