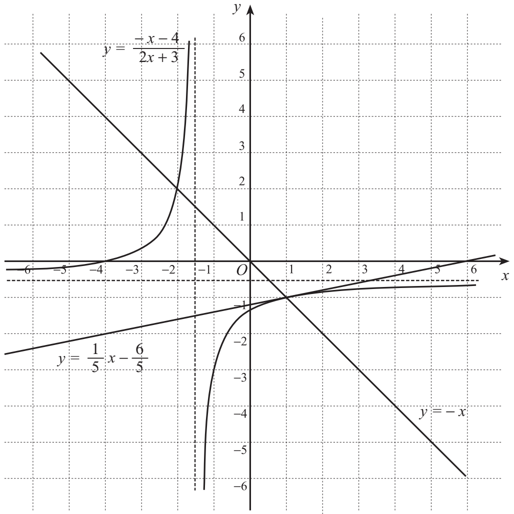
「復習問題」（12 月 17 日配布） 解答例

1 a) $\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1} = \dfrac{1}{7}$

b) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{-5-h}{5+2h}+1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{5+2h} = \frac{1}{5}$

c) 接線の方程式は $y - f(1) = f'(1)(x-1)$ だから，$y = \dfrac{1}{5}x - \dfrac{6}{5}$

d) $f(x) = \dfrac{-x-4}{2x+3} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{(-\frac{5}{4})}{x+\frac{3}{2}}$ とかけるので，$y = f(x)$ のグラフは $y = \dfrac{(-\frac{5}{4})}{x}$ のグラフを x 軸方向に $-\dfrac{3}{2}$，y 軸方向に $-\dfrac{1}{2}$ だけ平行移動した曲線である．



e) $y = f(x)$ のグラフの方が $y = -x$ のグラフより上にある x の範囲を求めればよい．$y = f(x)$ と $y = -x$ の交点の x 座標は -2 と 1 なので，上のグラフを参照して，$-2 < x < -\dfrac{3}{2}$，$x > 1$．

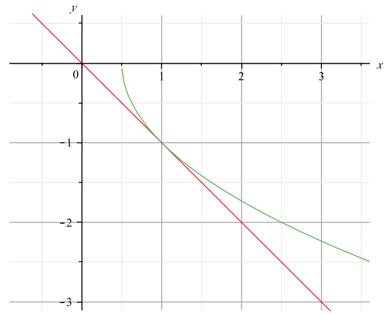
2 a) $\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1} = 1-\sqrt{3}$

b) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1} = \lim_{h\to 0}\frac{-\sqrt{2h+1}+1}{h}$

$\displaystyle = \lim_{h\to 0}\frac{(-\sqrt{2h+1}+1)(\sqrt{2h+1}+1)}{h(\sqrt{2h+1}+1)} = \lim_{h\to 0}\frac{-2}{(\sqrt{2h+1}+1)} = -1$

c) 接線の方程式は $y - f(1) = f'(1)(x-1)$ だから，$y = -x$

e)

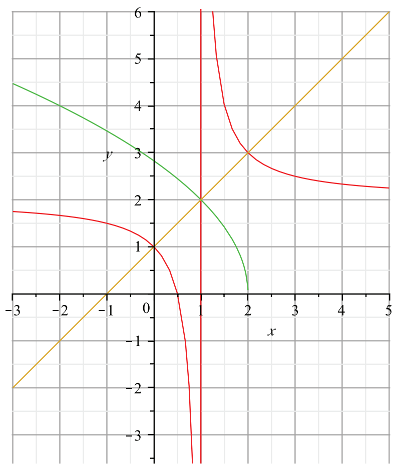


3 a) 定義域は $-4x+6 \geqq 0$，すなわち $x \leqq \dfrac{3}{2}$．また，値域は $y \geqq 0$．

b) $y = \sqrt{-4x+6}$ を x について解くと $x = -\dfrac{1}{4}y^2 + \dfrac{3}{2}$ となる．ここで，x と y を入れ換えて，$y = -\dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{3}{2}$．すなわち，$f^{-1}(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{3}{2}$．

c) 逆関数 $f^{-1}(x)$ の定義域は $f(x)$ の値域（で x と y を入れ換えたもの）なので，$x \geqq 0$．また，$f^{-1}(x)$ の値域は $f(x)$ の定義域（で x と y を入れ換えたもの）なので，$y \leqq \dfrac{3}{2}$．

4 下のグラフより，a) $0 < x < 1$ または $x > 2$．　b) $x \leqq 1$



$\boxed{5}$ a) $(g \circ f) = g\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = \dfrac{\left(\frac{1}{1-x}\right)+a}{\frac{1}{1-x}} = 1 + a(1-x)$

$$(f \circ g) = f\left(\frac{x+a}{x}\right) = \frac{1}{1-\left(\frac{x+a}{x}\right)} = \frac{-x}{a}$$

b) $1 + a(1-x) = \dfrac{-x}{a}$ がすべての x について成り立てばよい．この式を x について整理すると，$\dfrac{1-a^2}{a}x + (1+a) = 0$．この式の x の係数と定数項がともに 0 になるためには $a = -1$ が必要十分.

$\boxed{6}$ a) $f(x)$ の定義域は $x \neq -2$．値域を求める前にまず逆関数を求める．$y = \dfrac{2x-1}{x+2}$ を x について解くと $x = \dfrac{-(2y+1)}{y-2}$ となるから，x と y を入れ換え $f^{-1}(x) = \dfrac{-(2x+1)}{x-2}$. したがって，$f(x)$ の値域（$= f^{-1}(x)$ の定義域で x と y とおき変えたもの）は $y \neq 2$. また，$f^{-1}(x)$ の定義域は $x \neq 2$, 値域は $y \neq -2$.

b) $f(x)$ の定義域は真数条件より $x < 1$，値域は実数全体．$y = -\log(1-x)$ を x について解くと $x = 1 - e^{-y}$ となるから，x と y を入れ換え $f^{-1}(x) = 1 - e^{-x}$．$f^{-1}(x)$ の定義域は実数全体, 値域は $=$ $f(x)$ の定義域で x と y とおき変えたもので，$y < 1$.

$\boxed{7}$ a) $\left((2x^3+5)^7\right)' = 7(2x^3+5)^6(2x^3+5)' = 42x^2(2x^3+5)^6$

b) $\left(\dfrac{1}{(x^2-3)^2}\right)' = \dfrac{-\left((x^2-3)^2\right)'}{(x^2-3)^4} = \dfrac{-2(x^2-3)(x^2-3)'}{(x^2-3)^4} = \dfrac{-4x}{(x^2-3)^3}$

c) $\left((x^2+3)(x^2-2x+2)\right)' = (x^2+3)'(x^2-2x+2) + (x^2+3)(x^2-2x+2)' = 2x(x^2-2x+2) + (2x-2)(x^2+3) = 2(2x^3-3x^2+5x-3)$

d) $\left(\dfrac{2x-5}{3x^2+1}\right)' = \dfrac{(2x-5)'(3x^2+1)-(2x-5)(3x^2+1)'}{(3x^2+1)^2}$

$= \dfrac{2(3x^2+1)-(2x-5)(6x)}{(3x^2+1)^2} = \dfrac{-2(3x^2-15x-1)}{(3x^2+1)^2}$

e) $\left(\dfrac{x^4+3x-2}{x^2}\right)' = (x^2+3x^{-1}-2x^{-2})' = 2x - 3x^{-2} + 4x^{-3} = \dfrac{2x^4-3x+4}{x^3}$

f) $\left(\dfrac{x}{x^2-x+1}\right)' = \dfrac{(x)'(x^2-x+1)-x(x^2-x+1)}{(x^2-x+1)^2} = \dfrac{x^2-x+1-x(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}$

$= \dfrac{1-x^2}{(x^2-x+1)^2}$

g) $\left(\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{3}{2}}\right)' = -\dfrac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} = \dfrac{-3}{2x^2\sqrt{x}}$

h) $\left(\sqrt[3]{2x^2+5}\right)' = \left((2x^2+5)^{\frac{1}{3}}\right)' = \dfrac{1}{3}(2x^2+5)^{-\frac{2}{3}}(2x^2+5)' = \dfrac{4x}{3}(2x^2+5)^{-\frac{2}{3}}$

i) $\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)' = \dfrac{-\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)'}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2} = -\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2} = -\dfrac{\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}$

$= -\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}$

j) $\left(e^{-3x^2}\right)' = e^{-3x^2}(-3x^2)' = -6xe^{-3x^2}$

k) $\left(x^2e^{-x}\right)' = (x^2)'e^{-x} + x^2(e^{-x})' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$

l) $\left(\dfrac{e^x}{1-e^x}\right)' = \dfrac{(e^x)'(1-e^x)-e^x(1-e^x)'}{(1-e^x)^2} = \dfrac{e^x(1-e^x)-e^x(-e^x)}{(1-e^x)^2} = \dfrac{e^x}{(1-e^x)^2}$

m) $\left(\dfrac{x}{\log x - 1}\right)' = \dfrac{(x)'(\log x - 1) - x(\log x - 1)}{(\log x - 1)^2} = \dfrac{\log x - 1 - x \cdot \frac{1}{x}}{(\log x - 1)^2} = \dfrac{\log x - 2}{(\log x - 1)^2}$

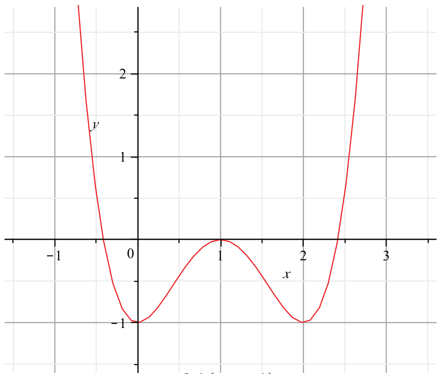
n) $\left(\log(x^2+1)\right)' = \dfrac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \dfrac{2x}{x^2+1}$

o) $\left(e^x \log x\right)' = (e^x)' \log x + e^x (\log x)' = e^x \log x + e^x \dfrac{1}{x} = \dfrac{e^x(x \log x + 1)}{x}$

$\boxed{8}$ a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$, $\quad f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x-1)(x-2)$

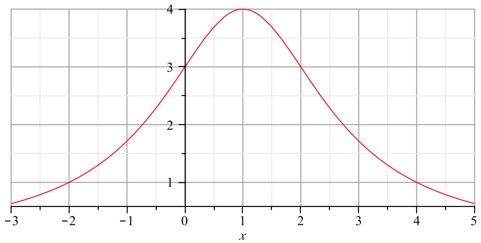
$f''(x) = 4(3x^2-6x+2)$, $f''(x) = 0$ となるのは $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$.

x		0		$\frac{3-\sqrt{3}}{3}$		1		$\frac{3+\sqrt{3}}{3}$		2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	-1	↗	$-\frac{5}{9}$	↗	0	↘	$-\frac{5}{9}$	↘	-1	↗



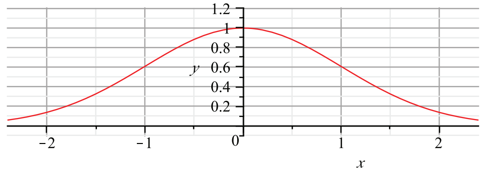
b) $f(x) = \dfrac{12}{x^2 - 2x + 4}$, $\quad f'(x) = \dfrac{-24(x-1)}{(x^2-2x+4)^2}$, $\quad f''(x) = \dfrac{72x(x-2)}{(x^2-2x+4)^3}$

x		0		1		2	
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↗	4	↘	3	↘



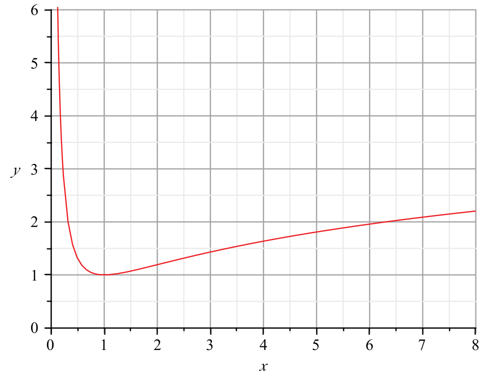
c) $f(x) = e^{-x^2/2}$, $\quad f'(x) = -xe^{-x^2/2}$, $\quad f''(x) = (x-1)(x+1)e^{-x^2/2}$

x		-1		0		1	
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$e^{-1/2}$	↗	1	↘	$e^{-1/2}$	↘



d) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \log x$, $\quad f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x^2}$, $\quad f''(x) = -\dfrac{x-2}{x^3}$

x	0		1		2	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$		↘	1	↗	$\frac{1}{2} + \log 2$	↗



$\boxed{9}$ a) $f'(x) = \dfrac{-(2x+1)(x-1)}{\sqrt{1-x^2}}$ となるので，増減表を書くと

x	-1		$-\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0
$f(x)$	0	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	0

したがって，$x = \pm 1$ のとき最大値 0 をとり，$x = -\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ をとる．

b) $f'(x) = -4(x-1)e^{-2x}$ なので，増減表は以下の通り．

x	0		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	-1	$\nearrow$	e^{-2}	$\searrow$	$5e^{-6}$

したがって，$x = 1$ のとき最大値 e^{-2} をとり，$x = 0$ のとき最小値 -1 をとる．

$\boxed{10}$ 缶詰の底面の半径を r, 高さを h とすると, 缶詰の表面積を S とすると, $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ と表せる．$S = 6\pi a^2$ という条件は $2\pi r^2 + 2\pi rh = 6\pi a^2$ と表せるが，これより

$$h = \frac{3a^2 - r^2}{r}$$

を得る．一方，缶詰の体積 V は $V = \pi r^2 h$ と表せるが，これに上で得た h の式を代入し，

$$V = \pi r^2 \frac{3a^2 - r^2}{r} = \pi r(3a^2 - r^2)$$

を得る．これを r で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dr} &= \pi\bigl((r)'(3a^2 - r^2) + r(3a^2 - r^2)'\bigr) = \pi\bigl((3a^2 - r^2) + r(-2r)\bigr)\\ &= 3\pi(a^2 - r^2) = 3\pi(a - r)(a + r)\end{aligned}$$

$r > 0$ のときの増減表は以下の通り．

r	0		a	
$\frac{dV}{dr}$		$+$	0	$-$
V	0	$\nearrow$	$2\pi a^3$	$\searrow$

したがって，体積 V は $r = a$，$h = (3a^2 - a^2)/a = 2a$ のとき最大になる．

$\boxed{11}$ $f(x) = \log x - \left(x - \dfrac{x^2}{2}\right)$ とおくと，$f'(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$．したがって，$x > 0$ のとき，$f(x)$ は増加する．また，$f(0) = 0$ であるから，$x > 0$ のとき $f(x) > 0$ が成り立つ．すなわち，$x - \dfrac{x^2}{2} < \log x$ である．