練習問題 5

1 $A = k[x, y]/(y^2 - x^3 - Ax - B)$ とする. ただし，基礎体 k は $\mathrm{char}(k) \neq 2, 3$ と仮定する.

a) 多項式 P，$Q \in k[x]$ で
$$P(x)(x^3 + Ax + B) + Q(x)(3x^2 + A) = 1$$
となるものが存在するためには $4A^3 + 27B^2 \neq 0$ が必要十分であることを示せ.

b) $4A^3 + 27B^2 \neq 0$ であるとする. 微分形式 $\omega \in \Omega_{A/k}$ を
$$\omega = P(x)\, y\, dx + 2Q(x)\, dy$$
と定義する．ただし，P，Q は前問の関係式をみたす多項式とする. このとき，$y\omega = dx$ であることを示せ. また，$\Omega_{A/k}$ は ω で生成されることを示せ.

c) $A_y = k[x, y, y^{-1}]/(y^2 - x^3 - Ax - B)$ を A の y による局所化とする．$\omega \in \Omega_{A/k}$ を $\Omega_{A_y/k}$ に制限した微分形式は $\dfrac{dx}{y}$ に一致することを示せ.

d) ［任意］$4A^3 + 27B^2 = 0$ であれば $\Omega_{A/k}$ は自由 A-加群ではないことを示せ.

2 $\mathrm{char}(k) \neq 2$ とする．$A = k[x, y]/(x^4 + y^4 - 1)$, $B = k[\xi, \zeta]/(\xi^4 + 1 - \zeta^4)$ とし，$\Omega_{A/k}$ and $\Omega_{B/k}$ をそれぞれ A，B の微分形式のなす加群とする.

a) $\Omega_{A/k}$，$\Omega_{B/k}$ それぞれの生成元を求めよ.

b) $A_y = k[x, y, y^{-1}]/(x^4 + y^4 - 1)$ を A を y で局所化した環, $B_\zeta = k[\xi, \zeta, \zeta^{-1}]$ を B を ζ で局所化した環とする. $\varphi : B_\zeta \to A_y$ を $\xi \mapsto xy^{-1}, \zeta \mapsto y^{-1}$ で定義される準同型とする. このとき，φ は $\Omega_{A_y/k}$ と $\Omega_{B_\zeta/k}$ の間の同型を引き起こすことを示せ.

3 前問と同じことを $A = k[x, y]/(x^3 + xy^3 + y)$, and $B = k[\xi, \zeta]/(\xi^3\zeta + \xi + \zeta^3)$ について調べよ.

2010 年 7 月 5 日