練習問題 4

1 ３つに２次形式を次のように定義する．

$$F_1(X,Y,Z,W) = XZ - Y^2,$$
$$F_2(X,Y,Z,W) = XW - YZ,$$
$$F_3(X,Y,Z,W) = YW - Z^2.$$

$S = k[U,V]$ と $B = k[X,Y,Z,W]/(F_1,F_2,F_3)$ を次数付環とし，L，C をそれぞれ，S，B で定義される射影曲線とする．また，$\varphi : B \to A$ を

$$\varphi(X) = U^3, \quad \varphi(Y) = U^2V, \quad \varphi(Z) = UV^2, \quad \varphi(W) = V^3$$

で定義される環準同型とする．

a) $L = D(U) \cup D(V)$，$C = D(X) \cup D(W)$ であることを示せ．

b) φ により誘導される写像 $\mathcal{O}_L(U) \cap \mathcal{O}_L(V) \to \mathcal{O}_C(X) \cap \mathcal{O}_C(W)$ は環同型であることを示せ．

c) $F_i = 0$ で定義される 射影空間 $\mathbf{P}^3$ 内の曲面 Q_i を考える．$1 \le i < j \le 3$ なる任意の i, j について，Q_i と Q_j の交わりは曲線 C ともう１つの直線をあわせたものであることを示せ．

d) さらに一般に，任意の $\lambda = (\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3)$ について，$F_\lambda = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 = 0$ で曲面 Q_λ を定義する．このとき，任意の $\lambda \neq \mu$ について Q_λ と Q_μ の交わりは曲線 C と直線の合併であることを示せ．

2 $A = k[x,y,z]$ とし，A のイデアル I を $I = (x^2 - y^3, y^2 - z^3)$ と定義する．また，$B = k[t]$ とする．さらに，環準同型 $\alpha : k[x,y,z] \to k[t]$ を $F(x,y,z) \mapsto F(t^9, t^6, t^4)$ で定義する．

a) 任意の多項式 $F(x,y,z)$ に対し，

$$F(x,y,z) \equiv a(z) + b(z)x + c(z)y + d(z)xy \mod I$$

をみたす $a(z), b(z), c(z), d(z) \in k[z]$ が存在することを示せ．これより，$\mathrm{Ker}\,\alpha = I$ であることを示せ．

b) I は A の素イデアルであることを示せ．

3 E を

$$X^2 - XZ - YW = 0, \qquad YZ - XW - ZW = 0.$$

で定義される 射影空間 $\mathbf{P}^3$ 内の曲線とする．また，V を $W = 0$ で定義される平面とする． このとき，写像 φ を

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & E \setminus \{(0:0:0:1)\} & \to & V \\ & (X:Y:Z:W) & \mapsto & (X:Y:Z:0) \end{array}$$

で定義する．

a) φ を $O = (0:0:0:1)$ にまで拡張し，拡張された写像 $\tilde{\varphi}$ が E から V への正則な射となるようにできるか．

b) $\tilde{\varphi}$ は E から射影平面 $\mathbf{P}^2$ 内で

$$Y^2Z = X^3 - XZ^2$$

により定義される曲線 C への同型写像となることを示せ．

2010 年 6 月 21 日