練習問題 3

$\boxed{1}$ t をパラメータとし，C を下の式でで定義される 3 次曲線とする.

$$X^3 + Y^3 + Z^3 = 3tXYZ$$

a) 点 $O = (1 : -1 : 0)$ は変曲点であることを示せ.

b) C 上の点全体の集合に対し, 授業で説明したように群構造を定義する．$P = (X : Y : Z)$, $T = (-1 : 0 : 1)$ とするとき，$-P$ および $P + T$ の座標を求めよ.

c) $2T = -T$，$3T = O$ が成り立つことを示せ.

$\boxed{2}$ C を非特異な 3 次曲線とし，O を C 上の点とする．C 上の点全体の集合に，以下のようにして演算を定義する．与えられた点 $P, Q \in C$ に対し，P，Q を通る直線と C は 3 点で交わるが，P，Q にくわえた第 3 の点を $P * Q$ とする．ただし，$P = Q$ のときは P，Q を通る直線とは P における C の接線とする.

a) このようにして定義された演算には，一般に単位元が存在しないことを示せ．すなわち，$P_0 * P = P$ が任意の $P \in C$ について成り立つような $P_0 \in C$ は存在しないことを示せ.

b) このようにして定義された演算は，一般に結合法則をみたさないことを示せ．すなわち，一般に $P * (Q * R) \neq (P * Q) * R$ であることを示せ.

c) $P * (P * Q) = Q$ であることを示せ.

d) O と S を通る直線が O において C に接するとする．このとき，次の式が成り立つことを示せ.

$$O * \bigl(Q * (Q * S)\bigr) = O$$

$\boxed{3}$ 集合 S には以下の性質を持つ演算 $\star$ が定義されているとする.

i) $P \star Q = Q \star P \quad \forall P, Q \in S$.

ii) $P \star (P \star Q) = Q \quad \forall P, Q \in S$.

元 $O \in S$ を 1 つ選び固定し，新しい演算 $+$ を以下のように定義する.

$$P + Q = O \star (P \star Q).$$

a) $+$ は可換であり，O は演算 $+$ の単位元となることを示せ.

b) 任意の $P, Q \in S$ に対し，方程式 $X + P = Q$ はただ一つの解 $X = P \star (Q \star O)$ を持つことを示せ．また，$-P$ を $P \star (Q \star O)$ と定義すると，$-P$ は方程式 $X + P = O$ のただ一つの解であることを示せ.

c) 次の条件は演算 $+$ が結合法則をみたすための必要十分条件であることを示せ.

iii) $P \star (O \star (R \star Q)) = Q \star (O \star (P \star R)) \quad \forall P, Q, R \in S$.

d) O' を S の別の元とする. 新たな演算 $+'$ を $P +' Q = O' \star (P \star Q)$ で定義する．さらに，$+$ も $+'$ も結合法則をみたし，$(S, +)$ and $(S, +')$ は群であるとする．このとき，写像

$$P \mapsto O \star (O' \star P)$$

は $(S, +)$ から $(S, +')$ への同型写像であることを示せ.

2010 年 5 月 24 日