練習問題 2

$\boxed{1}$ $P_1 = (1:0:0)$, $P_2 = (0:1:0)$, $P_3 = (0:0:1)$, $P_4 = (1:1:1)$ を射影平面 $\mathbb{P}^2$ 内の 4 点とし，$P_5 = (a:b:c)$ とする．さらに，$P_1, \dots, P_5$ を通る 2 次曲線を $C_{(a:b:c)}$ とする．

a) $C_{(a:b:c)}$ の方程式を求めよ．

b) $C_{(a:b:c)}$ が非退化であるための条件を求めよ．

$\boxed{2}$ 射影幾何では「円」は射影平面 $\mathbb{P}^2$ の非退化な２次曲線で，$(1:\pm i:0)$ を通るものとして定義される．

a) $\mathbb{P}^2$ の開集合 $U = \{(X:Y:Z) \mid Z \neq 0\}$ とアフィン平面 $\{(x,y) \mid x,y \in K\}$ とを，写像 $(X:Y:Z) \mapsto (X/Z, Y/Z)$ によって同一視する．このとき，上のように定義された円はアフィン平面内の通常の円に対応することを確かめよ．

b) P_1，P_2，P_3 を U の相異なる３点とする．このとき，３点 P_1，P_2，P_3 を通る円が一意的に定まるための必要十分条件はこれら３点が同一直線上にないことであることを示せ．

$\boxed{3}$ C_1，C_2 を次の方程式で与えられる 3 次曲線とする．

$$C_1 : X^3 + 2Y^3 - XZ^2 - 2YZ^2 = 0,$$
$$C_2 : 2X^3 - Y^3 - 2XZ^2 + YZ^2 = 0.$$

a) C_1 と C_2 の 9 つの交点を求めよ．

b) $\{(0,0), P_1, \dots, P_8\}$ を a) で求めた交点とする．$P_1, \dots, P_8$ を通る 3 次曲線は 9 番目の点 $(0,0)$ も通ることを直接確かめよ．

$\boxed{4}$ $F(X,Y,Z) \in k[X,Y,Z]$ を n 次同次多項式とする．

a) F の 3 つの偏微分はいずれも $n-1$ 次同次多項式であることを示せ．

b) 次の式が成り立つことを示せ．

$$X\frac{\partial F}{\partial X} + Y\frac{\partial F}{\partial Y} + Z\frac{\partial F}{\partial Z} = nF(X,Y,Z).$$

［ヒント：$F(tX,tY,tZ) = t^n F(X,Y,Z)$ を t の関数とみて微分せよ.］

c) C を $\mathbb{P}^2$ 内で $F(X,Y,Z) = 0$ で定義される曲線とし，P を $\mathbb{P}^2$ の点とする．P は必ずしも C 上の点であるとは仮定しない．このとき，P が C の特異点であるためには

$$\frac{\partial F}{\partial X}(P) = \frac{\partial F}{\partial Y}(P) = \frac{\partial F}{\partial Z}(P) = 0$$

が成り立つことが必要十分であることを示せ．

d) P を C 上の非特異な点とする．C の P における接線の方程式は

$$X\frac{\partial F}{\partial X}(P) + Y\frac{\partial F}{\partial Y}(P) + Z\frac{\partial F}{\partial Z}(P) = 0.$$

で与えられることを示せ．

2010 年 5 月 17 日