練習問題 1

$\boxed{1}$ 【線形代数の復習】

a) 実対称行列の固有値は実数であることを Hermite 内積を用いて示せ.

b) 実対称行列は（実）直行行列によって対角化できることを示せ.

c) 実数係数の 2 次形式は適当な座標変換によって $q(x) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i^2$，$\varepsilon_i = 0, \pm 1$，の形に書けることを示せ.

d) 実射影平面内の 2 次曲線は，実数点をもてば，$xz - y^2 = 0$ と同型であることを示せ.

$\boxed{2}$ k を標数が 2 ではない体，V を 3 次元 k-線形空間とし，$q : V \to K$ を V 上の非退化な 2 次形式とする.（2 次形式 q が非退化であるとは，q に付随した双線形形式（極形式）b が非退化であること，すなわち任意の $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{u}$ に対し $b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \neq 0$ となる $\boldsymbol{v}$ が存在することである.）いま，$\mathbf{0}$ 以外のベクトル $\boldsymbol{e}_1$ で $q(\boldsymbol{e}_1) = 0$ となるようなものがあると仮定する．このとき，$\boldsymbol{e}_1$ を含む V の基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を適当に選べば

$$q(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3) = x_1x_3 + ax_2^2, \quad a \in k^\times$$

と表せることを示したい.

a) $b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}) = 1$ となる $\boldsymbol{f}$ が存在することを示せ.

b) $\boldsymbol{e}_3 = \lambda \boldsymbol{e}_1 + \mu \boldsymbol{f}$ とおき，$b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) = 1/2$，$b(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3) = 0$ となるように，λ，μ を定めよ.

c) $b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 0$，$b(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 0$，$\boldsymbol{e}_2 \neq \mathbf{0}$ となる $\boldsymbol{e}_2$ が存在することを示し，上記の結論を導け.

d) 以上のことを用い，射影平面 $\mathbb{P}^2$ の非退化 2 次曲線は k 上定義された点を少なくともひとつ持つとき，$xz - y^2 = 0$ と同型であることを示せ.

$\boxed{3}$ $\mathbb{P}^2$ を k 上の射影平面とする．$\mathbb{P}^2$ の 3 点 $P_i(x_i : y_i : z_i)$，$(i = 1,2,3)$ が同一直線上にあるとは，(x_i, y_i, z_i)，$(i = 1,2,3)$ が一つの同次 1 次式 $ax + by + cz = 0$，$(a,b,c) \neq (0,0,0)$ をみたすことをいう.

a) 3 点 P_i，$(i = 1,2,3)$ が同一直線上にあることと，3 つのベクトル $\boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$，$(i = 1,2,3)$ が 1 次独立であることが同値であることを示せ.

b)3 点 P_i，$(i = 1,2,3)$ が同一直線上にないとき，P_i をそれぞれ $(1:0:0)$，$(0:1:0)$，$(0:0:1)$ に移すような座標変換が存在することを示せ.

c) 4 点 P_i，$(i = 1,2,3,4)$ のうちどの 3 点も同一直線上にないとする．このとき，P_i をそれぞれ $(1:0:0)$，$(0:1:0)$，$(0:0:1)$，$(1:1:1)$ に移すような座標変換が存在することを示せ.

d) 5 点 P_i，$(i = 1,2,3,4,5)$ のうちどの 3 点も同一直線上にないとする．このとき，P_i をすべて通るような非退化 2 次曲線が存在することを示せ.

$\boxed{4}$ $4x^4 + 8x^2 - 8x + 5 = 0$ を解け.

$\boxed{5}$ Q_1 を $Y^2 - 6YZ - 8XZ - 3Z^2 = 0$ で定義される 2 次曲線とし，Q_2 を $YZ - X^2 = 0$ で定義される 2 次曲線とする. このとき $\lambda Q_1 + \mu Q_2 = 0$ で定義される 2 次曲線の族について調べよ. とくにこの族に含まれる退化した 2 次曲線を求めよ.

【裏につづく】

$\boxed{6}$ 2 つの 2 次曲線の交わり方にはどれだけの可能性があるか．すべてについてひとつずつ具体例を挙げよ．また，2 つの 2 次曲線からできる 2 次曲線の族に含まれる退化した 2 次曲線を求めよ．

$\boxed{7}$ この問題では 3 次方程式 $x^3 + Ax + B = 0$ の解法について考察する．

a) t をパラメータとする 3 次曲線の族

$$C_t : \quad x^3 + y^3 + z^3 - txyz = 0$$

について考える．$t = 3$ のとき曲線 C_3 は 3 つの直線に分解されることを示せ．[多項式 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ は $x + y + z$ で割り切れることに注意せよ.]

b) 3 次方程式 $x^3 + Ax + B = 0$ を解くためには，

$$-3yz = A \quad \text{かつ} \quad y^3 + z^3 = B. \tag{1}$$

をみたす実数 y と z を見つければよいことを示せ．

c) $\eta = y^3$，$\zeta = z^3$ とおく． y と z が上式 (1) をみたすとすると η，ζ は $u^2 - Bu - A^3/27 = 0$ の 2 つの解であることを示せ．

d) $x^3 + Ax + B = 0$ の解の公式を求めよ．

e) 上で得られた解の公式を $x^3 - 7x + 6 = 0$ に適用して解を求めよ．

f) $x^3 - 7x + 6 = (x - 1)(x - 2)(x + 3)$ と因数分解されるので， 上の方程式の解は $1, 2, -3$ である．上で求めた解とどのように対応するかを調べよ．

【参考書】

- Miles Reid, “Undergraduate Algebraic Geometry”, London Mathematical Society（邦訳あり）
  4 次方程式の 2 次曲線による解き方はこの本に書いてある．3 次曲線についても詳しく書いてある．

- 永田雅宜，高校生のための代数幾何，現代数学社
  高校生のためのと謳っているが，Undergraduate 用の上記の本より内容は濃いかもしれない．

- Willam Fulton, “Algebraic Curves”, Benjamin
  `http://www.math.lsa.umich.edu/~wfulton/CurveBook.pdf` よりダウンロード可．代数曲線の入門書の定番．可換環に関する練習問題が豊富．

- Devid Eisenbud, “Commutative Algebra With a View Toward Algebraic Geometry (Graduate Texts in Mathematics, Vol 150)”, Springer Verlag
  上記の代数曲線の入門書には微分形式の理論が書かれていないが，この本には丁寧に解説されている．

- 梶原 健 「代数曲線入門」日本評論社
  レベルは高いかもしれないが厳密に丁寧に書かれている．微分形式についても触れられている．

2010 年 4 月 26 日