復習問題

1　$\mathbf{R}^4$ のベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ を

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と定義し，これらの列ベクトルを並べて 4 次の正方行列 A を作る．このとき次の問に答えよ．

a)　行列 A を階段行列に変形し，A の階数を求めよ．

b)　$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ は一次独立かどうか判定せよ．もし，一次従属ならば，これらのベクトルの間の一次関係式を求めよ．

2　$\mathbf{R}^4$ のベクトル

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

のうちで一次独立なものは最大何個あるか，理由を付して答よ．また（これらのベクトルからなる）その個数の一次独立なベクトルの組を一例挙げよ．

3　$\mathbf{R}^4$ のベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ を

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と定義し，これらの列ベクトルを並べて 4 次の正方行列 A を作る．このとき行列 A は基本変形によって下のように変形される．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき次の問に答えよ．

a)　行列 A の階数を求めよ．

b)　方程式 $A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の解をすべて求めよ．

c)　$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ は一次独立かどうか判定せよ．もし，一次従属ならば，これらのベクトルの間の一次関係式を求めよ．

d)　$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ で生成される部分空間 $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4 \rangle$ の基底を（1 つ）求めよ．

【裏につづく】

$\boxed{4}$ $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ とする．A を対角化し，A^n を求めよ．

$\boxed{5}$ 次の行列を対角化せよ．

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$　　b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{6}$ 平面内の直線 $y = 2x$ に関する対称移動を表現する行列を求めよ．

$\boxed{7}$ A を 3 行 3 列の行列とし，$\vec{f_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{f_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{f_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおく．いま，$\vec{f_1}$，$\vec{f_2}$，$\vec{f_3}$ はいずれも A の固有ベクトルであり，固有値はそれぞれ 1，2，3 であることがわかっているとする．

a) 3 つのベクトル $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ を並べてできる行列を P とするとき，P^{-1} を求めよ．

b) A は P によって対角化される，すなわち $P^{-1}AP$ は対角行列となる．この対角行列は何か．

c) A を求めよ．

$\boxed{8}$ 某C大学の S 学の講義に，学年の初め 50 人の学生が登録をすませた．最初の講義にはすべての学生が出席したが，その後の学生の行動パターンは次の通りであった．ある回に出席した学生の 85% がつぎの回にも出席したが，一度欠席するとすぐに落ちこぼれてしまうという S 学の特徴ゆえ，欠席者の 35% しか次の授業に出席してこなかった．このとき次の問に答えよ．

a) 第 n 回目の講義の出席者数を a_n，欠席者数を b_n とする．このとき，ベクトル $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$ はある行列 A とベクトル $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

と表わされる．行列 A をもとめよ．

b) 上で求めた行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

c) 行列 A を対角化せよ．

d) 一学期の半ば過ぎる頃から毎回の出席者数はほぼ一定になっていたという．出席者数はだいたい何人ぐらいだったと推定できるか?

$\boxed{9}$ 携帯電話のマーケットには D 社，A 社，S 社の 3 社がある．D 社の契約者は 1 期後には，70 % が契約を継続するが，20 % は A 社に変更し，10 % は S 社に変更する．また，A 社の契約者は 1 期後には，80 % が A 社との契約を継続するが，10 % は D 社に変更し，10 % は S 社に変更する．さらに，S 社の契約者は 1 期後には，80 % が S 社との契約を継続するが，10 % は D 社に変更し，10 % は A 社に変更する．このような動向が長期間にわたって続くとすると，各社のマーケットシェアは一定に近づく．シェアを表すベクトルは契約者の動向を表す行列の固有値 1 の固有ベクトルとなることを利用し，各社のシェアを求めよ．

2009 年 12 月 17 日