「練習問題 1」 略解

1 a) 変形されてできる階段行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これより，A の階数は 3.

b) $c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + c_3\vec{a}_3 + c_4\vec{a}_4 = \vec{0}$ の解を求めると，a) の階段行列を参照して $c_1 = t, c_2 = -2t, c_3 = t, c_4 = 0$（$t$ は任意の実数）という解を得る．ここで $t = 1$ とおけば，$\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \vec{0}$ という 1 次関係式を得る．したがって，$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ は 1 次従属.

2 $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$，$\vec{a}_5$ を並べてできる行列 $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -4 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -7 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 7 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ を基本変形によって階段行列に変形すると，（計算は少々複雑で，手計算でやる場合は工夫が必要だが）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる．この行列の階数は 4 なので，$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$，$\vec{a}_5$ のうち，1 次独立なものの最大個数は 4．基本変形の結果から，問題 1 と同様にして，$3\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \vec{0}$ が得られ，これより，$\vec{a}_3 = -2\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ となる．$\vec{a}_3$ を除いた，$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4$，$\vec{a}_5$ は 1 次独立なベクトルの組となる.

3 a) 階数は 3.

b) 基本変形後の行列を参照して，$c_4 = t$ とおくと，$c_1 = t, c_2 = -t, c_3 = t$ となる．したがって，すべての解は $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$（$t$ は任意の実数）

c) b) の結果より，$\vec{a}_1 - c_2\vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 = \vec{0}$ という 1 次関係式があることがわかる．したがって，$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ は 1 次従属.

d) $\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 = \vec{0}$ より，$\vec{a}_4 = -\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{a}_3$ とあらわせるので，$\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4 \rangle = \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \rangle$．また A の基本変形は $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ が 1 次独立であることも示しているので，$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ は $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4 \rangle$ の基底となる.

4 $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$A^n = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^n - (-1)^n & 2 \cdot 2^n - 2(-1)^n \\ -2^n + (-1)^n & -2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}$$

5 a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) 計算していって何かおかしいと思ったと思いますが，実はこの行列は対角化不可能な行列です.

6 $y = 2x$ と平行なベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ はこの対称移動で不変であり，$y = 2x$ と垂直なベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ は $-\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ に移る．そこで，$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ とおき，求める行列を A とおくと $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる．ゆえに，$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

7 a) $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

c) $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

8 a) $A = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.35 \\ 0.15 & 0.65 \end{pmatrix}$

b) 固有値 1, 固有ベクトル $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$; 固有値 0.5; 固有ベクトル $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.85 & 0.35 \\ 0.15 & 0.65 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 + 3 \cdot 0.5^{n-1} & 7 - 7 \cdot 0.5^{n-1} \\ 3 - 3 \cdot 0.5^{n-1} & 3 + 7 \cdot 0.5^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ となるから，$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 15 \end{pmatrix}$ したがって，出席者数は約 35 人程度だったと推定できる.

e) 前問と同様にしてシェアの変動を表す行列を求めると $\begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$ を得る．この行列の固有値 1 の固有ベクトルを求めると $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ となる．したがって，シェアは 3 : 5 : 4 となる．すなわち，D 社，A 社，S 社のシェアはそれぞれ，約 25%, 42%, 33% となる.