— Gauss の消去法 —

Gauss の消去法あるいは掃き出し法とは連立方程式の解を系統的に求める（あるいは解がないことを示す）アルゴリズムである．これを用いて次の連立方程式を解いてみる．

$$\begin{cases} \phantom{x+{}} 2y - 6z + 4w = -2 \\ x + y - z = 1 \\ -2x - y - z + 3w = 3 \\ 3x + y + 3z - 5w = -1 \end{cases}$$

ステップ 0 : 連立方程式を行列表示する．

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & -6 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

ステップ 1 : すべての成分が 0 でない列のうち，最も左の列に注目する．

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & -6 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & -5 & -1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} \uparrow & & & & \\ \text{注目} & & & & \end{array} \end{array}$$

ステップ 2 : ステップ 1 で注目した列の一番上の成分が 0 のときは，0 でない数を含む行と 1 番上の行とを入れ替える．

$$\xrightarrow{①\leftrightarrows②} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & 4 & -2 \\ -2 & -1 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

ステップ 3 : ステップ 1 で注目した列の一番上の成分を a とするとき，第 1 行を $1/a$ 倍し，一番上の成分を Pivot とする．

$$\xrightarrow{\text{そのまま}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & 4 & -2 \\ -2 & -1 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

注　この例ではたまたま $a = 1$ なので問題ないが, a が 1 でない場合，$1/a$ 倍することによって成分が分数になってしまい，計算が面倒になることがある．そのため，このステップを後回しにし，一番最後に Pivot を $1/a$ 倍する流儀もある．どちらを選ぶかは好みの問題．

ステップ 4 : Pivot を用いて Pivot より下の成分をすべて 0 にする．

$$\xrightarrow[]{\substack{③+①\times 2 \\ ④-①\times 3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 6 & -5 & -4 \end{array}\right)$$

ステップ 5：第 1 行と第 1 列を忘れて，残った行列について，ステップ 1 に戻り，これを繰り返す．

$$\xrightarrow{② \times \frac{1}{2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 6 & -5 & -4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[④ + ② \times 2]{③ - ②} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{④ + ③} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ステップ 6：Pivot を用いて Pivot より上の成分をすべて 0 にする．

$$\xrightarrow{② - ③ \times 2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{① - ②} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

この最後の行列をもとの連立方程式の形に戻すと

$$\begin{cases} x \quad + 2z = 14 \\ \quad y - 3z = -13 \\ \qquad\qquad w = 6 \\ \qquad\qquad 0 = 0 \end{cases}$$

となる．もともと 4 つあった方程式が実質 3 つに減っていることがわかる．そのため，解は一意的には定まらない．そこで，Pivot のない列（第 3 列）に対応する未知数 z を t とおく．（t はパラメータと呼ばれ，実数全体をはしる．）解は結局

$$\begin{cases} x = 14 - 2t \\ y = -13 + 3t \\ z = t \\ w = 6 \end{cases} \qquad （t \text{ は任意の実数}）$$

と表される．