9. 前期の復習

1 次の各々の連立 1 次方程式を Gauss の消去法を用いて解け.

a) $\begin{cases} x - y + z + 2w = 1 \\ 3x - 5y - 3z + 4w = -3 \\ 2x - 2y + 5z + w = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 3y + z - 2w = 1 \\ -2x + 7y + 8w = -2 \\ -2y - 3z - 6w = 1 \\ -3y - 4z - 9w = -1 \end{cases}$

2 次の各々の連立方程式が解を持つように定数 a を決め，そのときの解をすべて求めよ.

a) $\begin{cases} x + 3y + z - 2w = -2 \\ 2x + 7y - z - 6w = -3 \\ x + 2y + 7z + 3w = -6 \\ 4x + 9y + 7z - 8w = a \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y + 2z + w = 1 \\ 2x + 7y + 5z + 4w = 2 \\ 2x + 9y + 8z + 6w = 6 \\ x + 5y + 5z + 3w = a \end{cases}$

3 次の各々の行列の逆行列を求めよ.

a) $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4 次の連立一次方程式の解を前問で求めた逆行列を用いて求めよ.

a) $\begin{cases} 5x - 3y = -3 \\ -6x + 4y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = -4 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$

5 次の各々の行列式をもとめよ.

a) $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -7 & 5 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -3 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} -5 & 0 & 9 & 7 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 8 & 3 & 4 & -6 \\ -4 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & -4 \end{vmatrix}$

【裏につづく】

$\boxed{6}$ a を定数としたとき, 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & a & -1 \\ a & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

の行列式 $\det A$ を求め, A が逆行列を持たないような a を決定せよ．さらに, そのような a の値のそれぞれについて A の階数を求めよ.

$\boxed{7}$ 次の行列 A について A^2, A^3, A^6 を求めよ.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$　　b) $A = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$　　c) $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

$\boxed{8}$ x-軸に関する対称移動を f, 原点の回りの 90° 回転を g とするとき，合成移動 $g \circ f$ は、直線 $y = x$ に関する対称移動となることを行列の積を用いて示せ.

$\boxed{9}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ で表される座標平面上の点の移動を f とする.

a) A は原点のまわりの回転移動を表す行列であるが，その回転角度は何度であるか.

b) f によって，点 $(-1, 1)$ はどんな点に移るか.

c) A^2 を求めよ.

d) 合成移動 $f \circ f$ によって点 $(-1, 1)$ はどんな点に移るか.

e) 右の図のように，円 $x^2 + y^2 = 2$ に内接する正三角形 ABC がある．点 A の座標が $(-1, 1)$ のとき，残りの頂点の座標を求めよ.