復習問題

1 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3x-1}}\,dx$ を以下の方法で求めよ．

a) $3x-1=t$ とおいて求めよ．

b) $\sqrt{3x-1}=t$ とおいて求めよ．

2 次の不定積分を求めよ．

a) $\displaystyle\int x(3x+2)\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x\log x}\,dx$

c) $\displaystyle\int (x+1)e^x\,dx$

d) $\displaystyle\int \log(x+1)\,dx$

3 つぎの 2 変数関数について，各変数に関する偏微分を計算せよ．

a) $f(x,y)=x^4-4x^2y^2+3xy^3-y^4+3$

b) $f(x,y)=(x+2y^2+1)^3$

c) $f(x,y)=x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{3}{5}}$

d) $f(x,y)=\log(1+x^2+y^2)$

4 次の関数の臨界点を求め，各臨界点において極大・極小を判定せよ．

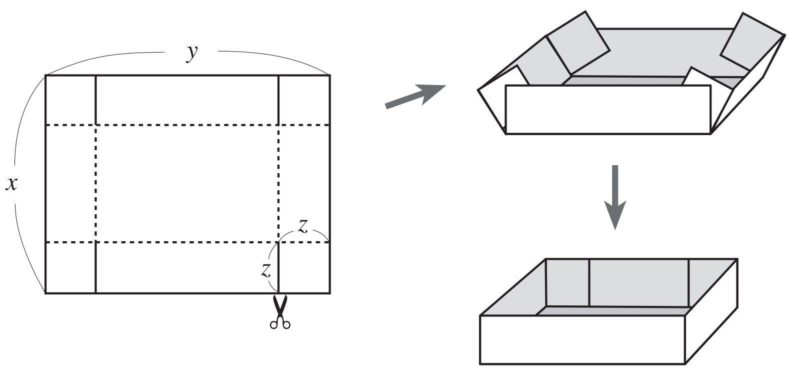
a) $f(x,y)=x^3-6x^2+x^2y^2-y^2$

b) $f(x,y)=\dfrac{x}{1+x^2+y^2}$

c) $f(x,y)=(x-y)e^{xy}$

5 条件 $x^2+xy+y^2=1$ のもとで，xy の最大値と最小値を求めよ．

6 たて x cm，よこ y cm のボール紙を使い，図のように四隅に z cm の切り口をいれ，z cm 四方の のりしろを作って折り曲げ，のりで貼ることにより，ふたのない箱をつくる．このとき，使用するボール紙の面積を一定値 a^2 に保ったまま，箱の容積を最大にすることを考える．ただし，a は正の定数とする．



a) 箱の容積を x と z の 2 変数関数とみて，それを $V(x,z)$ と書く．$V(x,z)$ を具体的に書き表せ．

裏につづく

b) 関数 $V(x, z)$ を領域 $D = \{(x, z) \mid 0 < 2z < x, 2xz < a^2\}$ 上で考える．$V(x, z)$ の偏微分を計算し，D 内における臨界点（すべての偏微分が 0 になる点）を求めよ．

c) 上で求めた臨界点において $V(x, z)$ が最大になることは認める．$V(x, z)$ の D における最大値を求めよ．また，そのときの箱の寸法はどのようなものであるかを述べよ．

d) 箱の容積を x, y, z の 3 変数関数とみて，$V(x, y, z)$ と書く．Lagrange の乗数法を用い，$V(x, y, z)$ が $xy = a^2$ という拘束条件の下で最大になるような x, y, z を求めよ．

7 底面の縦と横の長さがそれぞれ x と y で高さが z の，上面に蓋のない直方体の箱 B を考える．

a) B の表面積が一定値 S であるとするとき，B の体積 V を x と y の関数として表せ．

b) 表面積一定の条件の下で体積 V が最大になるのはどのようなときか．

8 $\sqrt{27} = 5\sqrt{1 + \dfrac{8}{100}}$ という表示と $\sqrt{1+x}$ の 2 次近似の式を用い $\sqrt{27}$ の近似値を求めよ．また，このようにして得られた近似値と $\sqrt{27}$ の値とは小数第何位まで一致するといえるか．