「復習問題」（12 月 16 日配布）略解

1 a) $3x-1=t$ とおくと，$x=\dfrac{t}{3}+\dfrac{1}{3}$．したがって，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{3}$．

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x-1}}\,dx=\int \frac{t+1}{3\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{3}\,dt=\frac{1}{9}\int\left(t^{\frac{1}{2}}+t^{-\frac{1}{2}}\right)dt=\frac{2}{27}t^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{9}t^{\frac{1}{2}}+C$$
$$=\frac{2}{27}(3x-1)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{9}(3x-1)^{\frac{1}{2}}+C$$

b) $\sqrt{3x-1}=t$ とおくと，$x=\dfrac{t^2}{3}+\dfrac{1}{3}$．したがって，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2t}{3}$．

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x-1}}\,dx=\int \frac{t^2+1}{3t}\cdot\frac{2t}{3}\,dt=\frac{2}{9}\int(t^2+1)\,dt=\frac{2}{27}t^3+\frac{2}{9}t+C$$
$$=\frac{2}{27}(3x-1)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{9}(3x-1)^{\frac{1}{2}}+C$$

2 a) $\displaystyle\int x(3x+2)\,dx=\int(3x^2+2x)\,dx=x^3+x^2+C$

b) $t=\log x$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$．これより形式的に　$dt=\dfrac{1}{x}\,dx$.

$$\int\frac{1}{x\log x}\,dx=\int\frac{1}{\log x}\cdot\left(\frac{1}{x}\,dx\right)=\int\frac{1}{t}\,dt=\log t+C=\log(\log x)+C$$

c) $u=x+1, v'=e^x$ とおいて，部分積分 $\int uv'=uv-\int u'v$ を用いる．このとき $v=e^x$ であることに注意.

$$\int(x+1)e^x\,dx=(x+1)e^x-\int 1\cdot e^x\,dx=(x+1)e^x-e^x+C=xe^x+C$$

d) 少しわかりにくいかもしれないが，$u=\log(x+1), v'=1$ とおいて，部分積分を用いる．このとき $v=x$ となることに注意.

$$\int\log(x+1)\,dx=x\log(x+1)-\int x\cdot\frac{1}{x+1}\,dx$$
$$=x\log(x+1)-\int\left(1-\frac{1}{x+1}\,dx\right)dx$$
$$=x\log(x+1)-(x-\log x)+C=(x+1)\log(x+1)-x+C$$

3 a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4x^3-8xy^2+3y^3$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-8x^2y+9xy^2-4y^3$.

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3(x+2y^2+1)^2$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=12y(x+2y^2+1)^2$.

c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}y^{\frac{3}{5}}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{3}{5}x^{\frac{2}{5}}y^{-\frac{2}{5}}$.

d) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{2x}{1+x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{2y}{1+x^2+y^2}$.

4 a) まず，臨界点を求めるために，連立方程式

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2-12x+2xy^2=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2x^2y-2y=0$$

を解く．2 番目の式から $y(x-1)(x+1)=0$ が得られるので，$y=0$，$x=1$，$x=-1$ をそれぞれ最初の式に代入し，$(x,y)=(0,0)$，$(4,0)$，$(1,\pm3\sqrt{2}/2)$，$(-1,\pm\sqrt{30}/2)$ を得る．次に「多変数関数の極大・極小」（10 月 29 日配布）の 2 ページ目にある $D(x,y)$ を計算し，同じ場所にある極大・極小の判定法を用いる.

$$D(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\right)^2$$
$$=(6x-12+2y^2)(2x^2-2)-(4xy)^2$$
$$=4(3x^3-6x^2-3y^2x^2-y^2-3x+6)$$

- $D(0,0)=24>0$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=-12<0$ であるから，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で極大.
- $D(4,0)=360>0$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=12>0$ であるから，$f(x,y)$ は $(4,0)$ で極小.
- $D(1,\pm3\sqrt{2}/2)=-72<0$ なので，$(1,\pm3\sqrt{2}/2)$ は鞍点（峠点）.
- $D(-1,\pm\sqrt{30}/2)=-120<0$ なので，$(-1,\pm\sqrt{30}/2)$ は鞍点（峠点）.

b) まず，臨界点を求めると，

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1-x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^2}=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2}=0$$
$$\iff\quad 1-x^2+y^2=0\quad\text{かつ}\quad -2xy=0$$
$$\iff\quad (x,y)=(1,0)\quad\text{または}\quad(-1,0)$$

2 階微分を計算し，極大・極小を判定すると以下のようになる.

- $D(1,0)=\dfrac{1}{4}>0$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0)=-\dfrac{1}{2}<0$ であるから，$f(x,y)$ は $(1,0)$ で極大.
- $D(-1,0)=\dfrac{1}{4}>0$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,0)=\dfrac{1}{2}>0$ であるから，$f(x,y)$ は $(-1,0)$ で極小.

c) まず，臨界点を求めると，

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=(1+xy-y^2)e^{xy}=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(-1+x^2-xy)e^{xy}=0$$
$$\iff\quad 1+xy-y^2=0\quad\text{かつ}\quad -1+x^2-xy=0$$
$$\iff\quad (x,y)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\quad\text{または}\quad\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

2 階微分を計算し，極大・極小を判定すると以下のようになる．

- $D\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{4}{e} < 0$ なので $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ は鞍点（峠点）．
- $D\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{4}{e} < 0$ なので $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ も鞍点（峠点）．

$\boxed{5}$ $L(x,y,\lambda) = xy - \lambda(x^2 + xy + y^2 - 1)$ とおく．

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) = y - \lambda(2x + y) = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) = x - \lambda(x + 2y) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$$

最初の 2 式から λ を消去すると $(y-x)(y+x) = 0$ が得られる．$y = x$ を第 3 式に代入すると $3x^2 - 1 = 0$ となり $(x,y) = \left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$（複合同順、以下同様） が得られる．また，$y = -x$ を第 3 式に代入すると $x^2 - 1 = 0$ となり，$(x,y) = (\pm 1, \mp 1)$ が得られる．$(x,y) = \left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ での xy の値は $\dfrac{1}{3}$ であり，$(x,y) = (\pm 1, \mp 1)$ での xy の値は -1 であるから，最大値は $\dfrac{1}{3}$，最小値は -1 となる．

$\boxed{6}$ a) 箱の底辺の縦と横の長さはそれぞれ，$x - 2z$，$y - 2z$ であり，箱の高さは z である．ボール紙の面積は一定値 a^2 という条件より $xy = a^2$．これを用いて y を消去して，

$$V = (x-2z)(y-2z)z = (x-2z)\left(\frac{a^2}{x} - 2z\right)z$$

b) $\dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{\partial V}{\partial y} = 0$ を解けばよい．

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -2z^2\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right), \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = a^2 - 4z\left(x + \frac{a^2}{x}\right) + 12z^2,$$

となり，D 内においては V の臨界点は $(x,z) = \left(a, \dfrac{a}{6}\right)$ のみであることがわかる．

c) $(x,z) = \left(a, \dfrac{a}{6}\right)$ のとき，$V = \dfrac{2a^3}{27}$ となる．また，このとき $y = a$ でもある．したがって， 箱の寸法は，縦 $\dfrac{2a}{3}$, 横 $\dfrac{2a}{3}$, 高さ $\dfrac{a}{6}$ ということになる．

d) $L(x,y,z) = V(x,y,z) - \lambda(xy - a^2) = (x-2z)(y-2z)z - \lambda(xy - a^2)$ とおく．

$$\frac{\partial L}{\partial x} = (y-2z)z - \lambda y, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = (x-2z)z - \lambda x,$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = xyz - 2(x+y)z^2 - z^3, \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = xy - a^2$$

最初の 2 つの式から $z(y-x) = 0$ を得る．まず，$z = 0$ とすると， $V = 0$ となり，V は最大にはならないので，不可．

次に $y = x$ とする．これを第 3 式に代入すると，$(x-2z)(x-6z) = 0$ となる．ここで，$x = 2z$ のときも $V = 0$ となるので不可．よって $x = 6z$．さらに，$y = x$ を第 4 式に代入すると $x = y = a$．すなわち， $x = y = a$，$z = \dfrac{a}{6}$ のとき V は最大となる．このとき，箱の底面は一辺 $x = \dfrac{2}{3}a$ の正方形で、高さは $\dfrac{a}{6}$ となる．

$\boxed{7}$ a) 表面積 $S = xy + 2xz + 2yz$，体積 $V = xyz$．最初の式を用いて，z を消去して

$$V = \frac{xy(S - xy)}{2(x+y)}$$

b)
$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^2(S - x^2 - 2xy)}{2(x+y)^2} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^2(S - 2xy - y^2)}{2(x+y)^2} = 0$$

を解けばよい．まず，$S - x^2 - 2xy = S - 2xy - y^2 = 0, x \neq y$ より，$x = y$ が得られる．これより，$x = y = \sqrt{\dfrac{S}{3}}$．このとき，$z = \dfrac{S - xy}{2(x+y)} = \sqrt{\dfrac{S}{12}}$．すなわち，底面が正方形で，高さが底面の一辺の長さの 2 分の 1 のとき，体積は埼大になる．

注 $L(x,y,z,\lambda) = xyz - \lambda(xy + 2xz + 2yz - S)$ とおいて Lagrange の乗数法を用いても解ける．

$\boxed{8}$ 12 月 9 日に配布した「高次微分を用いた近似計算」 の例と同様．

まず 2 次近似の式を用いて近似値を計算する．

$$\sqrt{27} = 5\sqrt{1 + \frac{8}{100}} \fallingdotseq 8\left(1 + \frac{1}{2}\frac{8}{100} - \frac{1}{16}\left(\frac{8}{100}\right)^2\right) = 5.1960$$

このときの誤差は $5R_3(\alpha)$ であり，

$$5|R_3(\alpha)| \leqq 5\frac{1}{16}\left(\frac{8}{100}\right)^3 = 0.00016$$

が成り立つ．すなわち，$-0.00016 \leqq 5R_3(\alpha) \leqq 0.00016$．となり，したがって，

$$5.19584 \leqq \sqrt{27} \leqq 5.19616$$

を得る．よって，得られた近似値と $\sqrt{27}$ の値とは小数第 2 位までは必ず一致するといえる．