

多変数関数の極大・極小

2 変数関数 $z = f(x, y)$ の 2 つの偏微分 $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ と $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ はまた 2 変数関数となる. これらの x または y に関する偏微分を計算することにより 4 つの関数が得られる. これらを $z = f(x, y)$ の 2 階の偏微分と呼ぶ. これらは次のように表わされる.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

ある緩やかな条件の下に $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ と $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$ は一致することが知られている.

1 次の関数の 2 階の偏微分をすべて計算せよ.

a) $f(x, y) = x^2y + xy^3$

b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

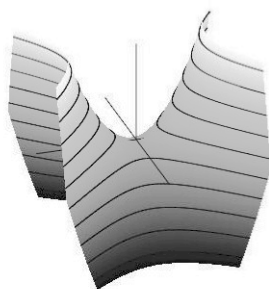
c) $f(x, y) = e^{-x/y}$

d) $f(x, y) = x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$

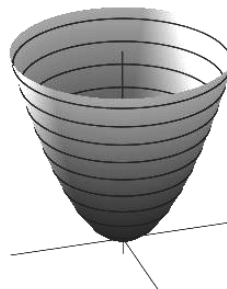
1 変数関数はグラフが水平でなければ、ある方向には必ず増大し、その反対方向には減少する. これは 2 変数の場合も同様で、接平面が傾いていれば、元の曲面もその点で山の頂や谷の底にはなり得ない. したがって、関数が点 (a, b) で極大または極小となるための必要条件として

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$$

が得られる. ただし、これは極大または極小となるための必要条件であって、必ずしも十分条件ではない. 上の 2 つの条件を満たすような点 (a, b) を $f(x, y)$ の臨界点と呼ぶ.



$z = x^2 - y^2$



$z = x^2 + y^2$

関数 $z = f(x, y)$ の臨界点 (a, b) において x を $a + \Delta x$ に、 y を $b + \Delta y$ に同時に変化させたとき、 z の増分 Δz は近似的に

$$\Delta z \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \Delta y^2 \right)$$

で与えられることが知られている.

ここで Δz の近似式は $\Delta x, \Delta y$ の 2 次同次式で $\frac{1}{2}(A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2)$ の形になっている。ここで

$$A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2 = A\left(\Delta x + \frac{B}{A}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{AC - B^2}{A}\right)\Delta y^2$$

と変形できることから、 $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$ と $AC - B^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\right)^2$ の正負によって、極大・極小が判定できる。たとえば、 $A, AC - B^2$ がともに正ならば、 $\Delta x = \Delta y = 0$ でない限り Δz は正となり、 $z = f(x, y)$ は (a, b) で極小になる。これをまとめると次のようになる。

2 変数関数の極大・極小判定法

(1) まず $z = f(x, y)$ の臨界点を求める。すなわち、次の連立方程式の解を求める。

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

(2) 2 階微分を計算し、

$$D(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)\right)^2$$

を計算する。このとき臨界点 (a, b) において

(a) $D(a, b) > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$ となれば f は (a, b) で極大。

(b) $D(a, b) > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$ となれば f は (a, b) は極小。

(c) $D(a, b) < 0$ となれば f は (a, b) で極大でも極小でもない (峠点, 鞍点)。

(d) $D(a, b) = 0$ ならばこの方法では判定不能。

2 次の関数が極大または極小となる点をもとめよ。

a) $f(x, y) = x^4 - 4xy + y^4$

b) $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$

c) $f(x, y) = xye^{-x^2 - y^2}$

d) $f(x, y) = (1 - x)(1 - y)(x + y - 1)$

線形代数を履修するなどして、行列式についての知識があれば $D(a, b)$ は行列式を用いて

$$D(a, b) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

と定義されていることもわかるだろう。