高次微分を用いた近似計算

関数 $f(x)$ において $x=0$ を $x=\Delta x$ に変化させたとき，その値の変化は次のような近似式で表せる．

$$f(\Delta x) \fallingdotseq f(0)+f'(0)\Delta x+\frac{f''(0)}{2!}\Delta x^2+\frac{f'''(0)}{3!}\Delta x^3+\dots\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\Delta x^n$$

しかし，具体的に $f(x)$ の近似値を計算する場合，誤差の大きき差がどれくらいか評価ができないと意味がない．微分積分学の理論を用いると，平均値の定理と呼ばれる定理を基にして，次のように誤差が評価できることが知られている．いま， $f(a)$ を近似計算しようとするとき，真の値と近似値の差を $R_{n+1}(a)$ とおく．すなわち

$$R_{n+1}(a)=f(a)-\left(f(0)+f'(0)a+\frac{f''(0)}{2!}a^2+\frac{f'''(0)}{3!}a^3+\dots\frac{f^{(n)}(0)}{n!}a^n\right)$$

とおく．このとき，$a>0$ ならば

$(*)$　　$|R_{n+1}(a)| \leqq \dfrac{M}{(n+1)!}a^{n+1}$　ただし，M は $|f^{(n+1)}(x)|$ の $0 \leqq x \leqq a$ における最大値.

となることが証明できる.（証明は微積分の教科書には大抵書いてあるので，興味があったらそれを参照.）

例 $\sqrt{65}=\sqrt{64+1}=8\sqrt{1+1/64}$ なので $f(x)=\sqrt{1+x}$ の $x=0$ まわりでの近似式を用いる．ここでは $n=2$，$a=1/64$ として近似値とそのときの誤差を求めてみる．先ず微分を計算すると，

$$f'(0)=\frac{1}{2\sqrt{1+0}}=\frac{1}{2},\qquad f''(0)=\frac{-1}{4(1+0)^{3/2}}=-\frac{1}{4},\qquad f'''(x)=\frac{3}{8(1+x)^{5/2}}$$

となる．したがって，近似値は

$$\sqrt{65}=8\sqrt{1+\frac{1}{64}}\fallingdotseq 8\left(f(0)+f'(0)\frac{1}{64}+\frac{f''(0)}{2!}\left(\frac{1}{64}\right)^2\right)=8.062255859375$$

また，$x \geqq 0$ のとき，$(1+x)^{5/2} \geqq (1+0)^{5/2}=1$ であるから，

$$|f'''(x)|=\left|\frac{3}{8(1+x)^{5/2}}\right| \leqq \left|\frac{3}{8(1+0)^{5/2}}\right|=\frac{3}{8}$$

となる．これより，$|f'''(x)|$ の $0 \leqq x \leqq a=1/64$ における最大値 M は $\dfrac{3}{8}$ である．したがって，近似の誤差は、上の $(*)$ を用いて

$$8\times\left|R_3\left(\frac{1}{64}\right)\right| \leqq 8\times\frac{\left(\frac{3}{8}\right)}{3!}\left(\frac{1}{64}\right)^3 \fallingdotseq 0.00000190735$$

と評価できる．これより，$\sqrt{65}$ の小数点以下第 5 位までの値は 8.06225 であることがわかる.

$\boxed{1}$ a) $\sqrt{26}$ の値を小数点以下 3 桁まで求めよ.

b) $\cos 0.01$ の値を小数点以下 10 桁まで正しく求めよ.

$\boxed{2}$ a) α を正の実数とするとき，$1+\alpha$ の 立方根 $\sqrt[3]{1+\alpha}$ を $1+\dfrac{\alpha}{3}-\dfrac{\alpha^2}{9}$ で近似したときの誤差の範囲を評価せよ.

b) $\sqrt[3]{9}=2\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{8}}$ という表示と a) の近似式を応用して $\sqrt[3]{9}$ の近似値を計算せよ．また，このようにして得られた近似値と $\sqrt[3]{9}$ の値とは小数第何位まで一致するといえるか.