

復習問題

● キーワード：

分数関数のグラフ，無理関数のグラフ，合成関数・逆関数，平均変化率，瞬間変化率（＝微分係数），導関数，接線の傾きと方程式，積・商の微分公式，合成関数の微分法，増減表，極大・極小，凹凸，変曲点，いろいろな量の変化率

1 関数 $f(x) = \frac{-x-4}{2x+3}$ について以下の問いに答えよ.

- x が 1 から 2 まで変化するときの $f(x)$ の平均変化率を求めよ.
- $x = 1$ における $f(x)$ の微分係数を定義に基づいて求めよ.
- $y = f(x)$ のグラフの $(1, -1)$ における接線の方程式を求めよ.
- $y = f(x)$ のグラフは $y = \frac{k}{x}$ のグラフを x 軸方向に p ， y 軸方向に q だけ平行移動した曲線である. k ， p ， q は何かを答えよ.
- $y = f(x)$ のグラフと $(1, -1)$ における接線を描け.
- グラフを利用して不等式 $\frac{-x-4}{2x+3} > -x$ を解け.

2 $f(x) = -\sqrt{2x-1}$ として前問の a) b) c) e) に答えよ.

3 $f(x) = \sqrt{-4x+6}$ とする. 以下の問いに答えよ.

- 関数 $y = f(x)$ の定義域と値域を求めよ.
- $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ を求めよ.
- 逆関数 $y = f^{-1}(x)$ の定義域と値域を求めよ.

4 グラフを利用して，次の不等式を解け.

- $\frac{2x-1}{x-1} < x+1$
- $\sqrt{-4x+8} \geq x+1$

5 a を定数とし， $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ， $g(x) = \frac{x+a}{x}$ とする.

- $(g \circ f)(x)$ と $(f \circ g)(x)$ を求めよ.
- $(g \circ f)(x)$ と $(f \circ g)(x)$ が同じ関数になるように，定数 a の値を定めよ.

6 次のおのおのの関数について，その定義域と値域を求めよ. また，それぞれの逆関数を求め，逆関数の定義域と値域も求めよ.

- $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$
- $f(x) = -\log(1-x)$

7 次の関数を変数 x で微分せよ.

a) $f(x) = (2x^3 + 5)^7$	b) $f(x) = \frac{1}{(x^2 - 3)^2}$	c) $f(x) = (x^2 + 3)(x^2 - 2x + 2)$
d) $f(x) = \frac{2x - 5}{3x^2 + 1}$	e) $f(x) = \frac{x^4 + 3x - 2}{x^2}$	f) $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}$
g) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$	h) $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 + 5}$	i) $f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$
j) $f(x) = e^{-3x^2}$	k) $f(x) = x^2 e^{-x}$	l) $f(x) = \frac{e^x}{1 - e^x}$
m) $f(x) = \frac{x}{(\log x - 1)}$	n) $f(x) = \log(x^2 + 1)$	o) $f(x) = e^x \log x$

8 次の関数の増減, 極値, グラフの凹凸および変曲点を調べ, そのグラフをかけ.

a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$	b) $f(x) = \frac{12}{x^2 - 2x + 4}$
c) $f(x) = e^{-x^2/2}$	d) $f(x) = \frac{1}{x} + \log x$

9 次の関数の最大値, 最小値を求めよ.

a) $(x - 1)\sqrt{1 - x^2} \quad (-1 \leq x \leq 1)$	b) $(2x - 1)e^{-2x} \quad (0 \leq x \leq 3)$
---	--

10 $x > 0$ のとき, 不等式 $x - \frac{x^2}{2} < \log(1 + x)$ が成り立つことを証明せよ.

11 球が毎秒 8 cm^3 の割合で体積を増しているとする. 体積を増し始めてから t 秒後の球の半径, 表面積, 体積を, それぞれ $r \text{ cm}$, $S \text{ cm}^2$, $V \text{ cm}^3$ とするとき, $r = 2$ のときの変化率 $\frac{dV}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$, $\frac{dS}{dt}$ をそれぞれ求めよ.

12 水面から 9 m の高さの岸壁から, 綱で船を引き寄せる. 毎秒 2 m の割合で綱をたぐるとき, 15 m になった瞬間の船の速さを求めよ.