

## 「練習問題2」略解

$$\boxed{3} \quad \left| \begin{array}{cc} 1-p-\lambda & q \\ p & 1-q-\lambda \end{array} \right| = 1-p-q-(2-p-q)\lambda + \lambda^2 = (\lambda-1)(\lambda-1+p+q)$$

より、固有値  $\lambda$  は 1 と  $1-p-q$ 。それぞれについて固有値を求めると  $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  が得られる。

そこで  $P = \begin{pmatrix} q & 1 \\ p & -1 \end{pmatrix}$  とおく。このとき  $\det P = p+q$  なので  $p=q=0$  のとき以外は  $P$  は逆行列を持ち、

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-p-q \end{pmatrix}$$

となる。

$p=q=0$  のときは  $M=I$  (単位行列) なので  $M^n = I$

$p=q=0$  または 1 以外の場合には  $|1-p-q| < 1$  となるので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-p-q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  となる。したがって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M^n = \begin{pmatrix} q & 1 \\ p & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} q & 1 \\ p & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix}$$

いま、初期ベクトルを  $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$  とすると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M^n \vec{v}_0 = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{v_1 + v_2}{p+q} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$$

となる。この最後のベクトルは固有値 1 の固有ベクトルとなっている。すなわち、 $\vec{v}_0$  が何であっても  $\vec{v}_n = M^n \vec{v}_0$  は固有値 1 の固有ベクトルに収束する。

一方  $p=q=1$  のときは  $M^{2k} = I$ ,  $M^{2k+1} = M \neq I$  となり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n$  は存在しない。

$\boxed{4}$  上の問題で  $p=q=\frac{1}{2}$  の場合である。この場合、最終的には任意のベクトルは  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  のスカラー倍に収束する。これは情報が正しく伝わる確率と逆に伝わる確率が等しくなることを意味する。これは、伝えられた情報の意味が次第になくなっていくことを意味する。