練習問題 1

$\boxed{1}$ $\mathbf{R}^4$ のベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ を

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と定義し，これらの列ベクトルを並べて 4 次の正方行列 A を作る．このとき次の問に答えよ．

a) 行列 A を階段行列に変形し，A の階数を求めよ．

b) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ は一次独立かどうか判定せよ．もし，一次従属ならば，これらのベクトルの間の一次関係式を求めよ．

$\boxed{2}$ $\mathbf{R}^4$ のベクトル

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

のうちで一次独立なものは最大何個あるか，理由を付して答よ．また（これらのベクトルからなる）その個数の一次独立なベクトルの組を一例挙げよ．

$\boxed{3}$ $\mathbf{R}^4$ のベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ を

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と定義し，これらの列ベクトルを並べて 4 次の正方行列 A を作る．このとき行列 A は基本変形によって下のように変形される．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき次の問に答えよ．

a) 行列 A の階数を求めよ．

b) 方程式 $A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の解をすべて求めよ．

c) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ は一次独立かどうか判定せよ．もし，一次従属ならば，これらのベクトルの間の一次関係式を求めよ．

d) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ で生成される部分空間 $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4 \rangle$ の基底を（1 つ）求めよ．

裏につづく

$\boxed{4}$ a を定数とし, $\mathbf{R}^4$ の 4 つのベクトル

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -a \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

で生成される部分空間 $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4 \rangle$ を V_a で表す． V_a の次元が 3 以下になるような a の値を求めよ．また，そのような a の値それぞれについて V_a の基底を一組ずつ求めよ．

$\boxed{5}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ とし， $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおく．また，

a) 3 つのベクトルの組 $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ は 3 次元数ベクトル空間 $\mathbf{R}^3$ の基底であることを示せ．

b) 3 つのベクトル $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ を並べてできる行列を P とする． P^{-1} を求めよ．

c) $\vec{x}$ を $A\vec{x}$ に移す 1 次変換を T とする． T の基底 $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ に関する表現行列 B を求めよ．

d) $B = P^{-1}AP$ であることを確かめよ．

$\boxed{6}$ 平面内の直線 $y = 2x$ に関する対称移動を表現する行列を求めよ．

$\boxed{7}$ 3 次元空間の平面 $x - 2y + 2z = 0$ に関する対称変換 T を表現する行列を求めたい．

a) $x - 2y + 2z = 0$ で表わされる $\mathbf{R}^3$ の部分空間 W の基底を一つ求めよ．

b) a) で得られた基底に $x - 2y + 2z = 0$ の法線ベクトルとをあわせた三つのベクトルからなる組は $\mathbf{R}^3$ の基底となることを示せ．

c) b) で得られた $\mathbf{R}^3$ の基底に関する T の表現行列を求めよ．

d) T の標準基底に関する表現行列を求めよ．