「練習問題 1」 略解

$\boxed{1}$ a) 変形されてできる階段行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これより，A の階数は 3.

b) $c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + c_3\vec{a}_3 + c_4\vec{a}_4 = \vec{0}$ の解を求めると，a) の階段行列を参照して $c_1 = t, c_2 = -2t, c_3 = t, c_4 = 0$（$t$ は任意の実数）という解を得る．ここで $t = 1$ とおけば，$\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \vec{0}$ という 1 次関係式を得る．したがって，$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ は 1 次従属.

$\boxed{2}$ $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$，$\vec{a}_5$ を並べてできる行列 $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -4 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -7 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 7 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ を基本変形によって階段行列に変形すると，（計算は少々複雑で，手計算でやる場合は工夫が必要だが）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる．この行列の階数は 4 なので，$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$，$\vec{a}_5$ のうち，1 次独立なものの最大個数は 4．基本変形の結果から，問題 1 と同様にして，$3\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \vec{0}$ が得られ，これより，$\vec{a}_3 = -2\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ となる． $\vec{a}_3$ を除いた，$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4$，$\vec{a}_5$ は 1 次独立なベクトルの組となる.

$\boxed{3}$ a) 階数は 3.

b) 基本変形後の行列を参照して，$c_4 = t$ とおくと，$c_1 = t, c_2 = -t, c_3 = t$ となる．したがって，すべての解は $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ （t は任意の実数）

c) b) の結果より，$\vec{a}_1 - c_2\vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 = \vec{0}$ という 1 次関係式があることがわかる．したがって，$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ は 1 次従属.

d) $\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 = \vec{0}$ より，$\vec{a}_4 = -\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{a}_3$ とあらわせるので，$\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4 \rangle = \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \rangle$．また A の基本変形は $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ が 1 次独立であることも示しているので，$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ は $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4 \rangle$ の基底となる.

$\boxed{4}$ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ を並べてできる行列を基本変形すると $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & -1+a^2 \end{pmatrix}$ となる．この行列の階数が $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4 \rangle$ が V_a の次元に等しいが，階数が 3 以下になるのは，対角線上の成分のいずれかが 0 になることである.（行列式はこれらの対角成分の積となる.）したがって，V_a の次元が 3 以下になるのは $a = \pm 1$ のとき.

$a = 1$ のとき，先ほどの行列に $a = 1$ を代入し、さらに基本変形を続けると，$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる．したがって，$\vec{a}_1, \vec{a}_2$ が V_1 の基底の 1 つとなる．とくに $\dim V_1 = 2$.

$a = -1$ のとき， $a = -1$ を代入し、基本変形を続けると，$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる．したがって，$\vec{a}_1, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ が V_{-1} の基底の 1 つとなる．とくに $\dim V_{-1} = 3$.

$\boxed{5}$ a) $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ を並べてできる行列を P とおく．P の階数が 3 であることを示せばよいが，そのためには $\det P \neq 0$ を示せばよい．実際計算すると $\det P = 6$ となるので，$(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ は $\mathbf{R}^3$ の基底である.

b) $P^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A\vec{f}_1 = 2\vec{f}_1$，$A\vec{f}_2 = -3\vec{f}_2$，$A\vec{f}_3 = \vec{0}$ なので，基底 $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ に関する表現行列 B は $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) 実際に $P^{-1}AP$ を計算すると B となる.

$\boxed{6}$ $y = 2x$ と平行なベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ はこの対称移動で不変であり，$y = 2x$ と垂直なベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ は $-\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ に移る．そこで，$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ とおき，求める行列を A とおくと $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる．ゆえに，$A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\boxed{7}$ a) $x - 2y + 2z = 0$ の解は，$y = s$，$z = t$ とおくと $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表せる．したがって，$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $x - 2y + 2z = 0$ の法線ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$．これらを並べてできる行列を P とすると，P が逆行列を持つことを示せばよい．行列式を計算すると $\det P = 9$ となるので P はたしかに逆行列を持つ.

c) 対称変換 T により $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は変化しないが, 法線ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ に移される．したがって，T の表現行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

d) 求める行列を A とすると，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ となっているはずなので，$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$