

線形代数 II・数学 II — 期末試験

2008 年 1 月 10 日

時間 60 分

- 筆記用具以外の持ち込みは不可.
- 最後の結果だけを書くのではなく, 途中の計算や説明も書くこと.

1] \mathbf{R}^4 のベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ を

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と定義し, これらの列ベクトルを並べて 4 次の正方行列 A を作る. このとき行列 A は基本変形によって下のように変形される.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき次の間に答えよ.

- a) 方程式 $A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の解をすべて求めよ.
- b) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ は一次独立かどうか判定せよ. もし, 一次従属ならば, これらのベクトルの間の一次関係式を求めよ.

2] 行列 B を

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

とする. B の固有値と固有ベクトルをもとめ, B を対角化せよ.

3] ある都市では, その総面積の $x\%$ が商業地域, $y\%$ が工業地域で, 残りの $z\%$ が住居地域であるとする. 5 年後の利用率をそれぞれ $x'\%$, $y'\%$, $z'\%$ としたとき, 次の関係が成り立つとする.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

上の関係式が長期間にわたって成り立つとすると, 数十年後に, 商業地域, 工業地域, 住居地域の比率がほぼ一定に近づく. その比率を表わすベクトルは上の行列の固有値 1 の固有ベクトルとなることを利用して, それを求めよ.

【裏に続く】

4 衛星放送のマーケットには V 社と W 社の 2 社がある。V 社の契約者は 1 期後には、60 % が契約を継続するが、40 % は W 社に変更する。また、W 社の契約者は 1 期後には、80 % が W 社との契約を継続するが、20 % は V 社に変更する。このとき次の間に答えよ。

a) 第 n 期の V 社のシェアを v_n 、W 社のシェアを w_n とする。このとき、ベクトル $\begin{pmatrix} v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}$ はある行列 M とベクトル $\begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix} v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

と表わされる。行列 M をもとめよ。

b) 上で求めた行列 M の固有値と固有ベクトルを求めよ。

c) 行列 M を対角化せよ。

d) M^n を求めよ。

e) 【ボーナス問題】 $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n$ を求めよ。それを用いて、第 1 期のマーケットシェアがどうであれ長期的にはシェアはある一定の割合に近づくことを示せ。