「復習問題」（12 月 17 日配布） 略解

1 a) $3x-1=t$ とおくと，$x=\dfrac{t}{3}+\dfrac{1}{3}$．したがって，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{3}$．

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x-1}}\,dx=\int\frac{t+1}{3\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{3}\,dt=\frac{1}{9}\int\left(t^{\frac12}+t^{-\frac12}\right)dt=\frac{2}{27}t^{\frac32}+\frac{2}{9}t^{\frac12}+C$$
$$=\frac{2}{27}(3x-1)^{\frac32}+\frac{2}{9}(3x-1)^{\frac12}+C$$

b) $\sqrt{3x-1}=t$ とおくと，$x=\dfrac{t^2}{3}+\dfrac{1}{3}$．したがって，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2t}{3}$．

$$\int\frac{x}{\sqrt{3x-1}}\,dx=\int\frac{t^2+1}{3t}\cdot\frac{2t}{3}\,dt=\frac{2}{9}\int(t^2+1)\,dt=\frac{2}{27}t^3+\frac{2}{9}t+C$$
$$=\frac{2}{27}(3x-1)^{\frac32}+\frac{2}{9}(3x-1)^{\frac12}+C$$

2 a) $\displaystyle\int x(3x+2)\,dx=\int(3x^2+2x)\,dx=x^3+x^2+C$

b) $t=\log x$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$．これより形式的に　$dt=\dfrac{1}{x}\,dx$．

$$\int\frac{1}{x\log x}\,dx=\int\frac{1}{\log x}\cdot\left(\frac{1}{x}\,dx\right)=\int\frac{1}{t}\,dt=\log t+C=\log(\log x)+C$$

c) $u=x+1,\ v'=e^x$ とおいて，部分積分 $\int uv'=uv-\int u'v$ を用いる．このとき $v=e^x$ であることに注意．

$$\int(x+1)e^x\,dx=(x+1)e^x-\int1\cdot e^x\,dx=(x+1)e^x-e^x+C=xe^x+C$$

d) 少しわかりにくいかもしれないが，$u=\log(x+1),\ v'=1$ とおいて，部分積分を用いる．このとき $v=x$ となることに注意．

$$\int\log(x+1)\,dx=x\log(x+1)-\int x\cdot\frac{1}{x+1}\,dx$$
$$=x\log(x+1)-\int\left(1-\frac{1}{x+1}\,dx\right)dx$$
$$=x\log(x+1)-(x-\log x)+C=(x+1)\log(x+1)-x+C$$

3 a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4x^3-8xy^2+3y^3$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-8x^2y+9xy^2-4y^3$．

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3(x+2y^2+1)^2$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=12y(x+2y^2+1)^2$．

c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{2}{5}x^{-\frac35}y^{\frac35}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{3}{5}x^{\frac25}y^{-\frac25}$．

d) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{2x}{1+x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{2y}{1+x^2+y^2}$．

4 a) まず，臨界点を求めるために，連立方程式

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2-12x+2xy^2=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2x^2y-2y=0$$

を解く．2 番目の式から $y(x-1)(x+1)=0$ が得られるので，$y=0$，$x=1$，$x=-1$ をそれぞれ最初の式に代入し，$(x,y)=(0,0)$，$(4,0)$，$(1,\pm3\sqrt{2}/2)$，$(-1,\pm\sqrt{30}/2)$ を得る．次に「多変数関数の極大・極小」(10 月 19 日配布) の 2 ページ目にある $D(x,y)$ を計算し，同じ場所にある極大・極小の判定法を用いる．

$$D(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)-\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\Big)^2$$
$$=(6x-12+2y^2)(2x^2-2)-(4xy)^2$$
$$=4(3x^3-6x^2-3y^2x^2-y^2-3x+6)$$

- $D(0,0)=24>0$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=-12<0$ であるから，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で極大．
- $D(4,0)=360>0$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=12>0$ であるから，$f(x,y)$ は $(4,0)$ で極小．
- $D(1,\pm3\sqrt{2}/2)=-72<0$ なので，$(1,\pm3\sqrt{2}/2)$ は鞍点（峠点）．
- $D(-1,\pm\sqrt{30}/2)=-120<0$ なので，$(-1,\pm\sqrt{30}/2)$ は鞍点（峠点）．

b) まず，臨界点を求めると，

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1-x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^2}=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2}=0$$
$$\iff\quad 1-x^2+y^2=0\quad\text{かつ}\quad -2xy=0$$
$$\iff\quad (x,y)=(1,0)\quad\text{または}\quad(-1,0)$$

2 階微分を計算し，極大・極小を判定すると以下のようになる．

- $D(1,0)=\dfrac{1}{4}>0$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1)=-\dfrac{1}{2}<0$ であるから，$f(x,y)$ は $(1,0)$ で極大．
- $D(-1,0)=\dfrac{1}{4}>0$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,0)=\dfrac{1}{2}>0$ であるから，$f(x,y)$ は $(-1,0)$ で極小．

c) まず，臨界点を求めると，

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=(1+xy-y^2)e^{xy}=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(-1+x^2-xy)e^{xy}=0$$
$$\iff\quad 1+xy-y^2=0\quad\text{かつ}\quad -1+x^2-xy=0$$
$$\iff\quad (x,y)=\left(\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{2}\right)\quad\text{または}\quad\left(-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2}\right)$$

2 階微分を計算し，極大・極小を判定すると以下のようになる．

- $D\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{4}{e} < 0$ なので $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ は鞍点（峠点）．
- $D\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{4}{e} < 0$ なので $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ も鞍点（峠点）．

$\boxed{5}$ $L(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x^2 + xy + y^2 - 1)$ とおく．

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = y - \lambda(2x + y) = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = x - \lambda(x + 2y) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$$

最初の 2 式から λ を消去すると $(y - x)(y + x) = 0$ が得られる．$y = x$ を第 3 式に代入すると $3x^2 - 1 = 0$ となり $(x, y) = \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$（複合同順、以下同様）が得られる．また，$y = -x$ を第 3 式に代入すると $x^2 - 1 = 0$ となり，$(x, y) = (\pm 1, \mp 1)$ が得られる．$(x, y) = \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ での xy の値は $\frac{1}{3}$ であり，$(x, y) = (\pm 1, \mp 1)$ での xy の値は -1 であるから，最大値は $\frac{1}{3}$，最小値は -1 となる．

$\boxed{6}$ a) 箱の底辺の縦と横の長さはそれぞれ，$x - 2z$，$y - 2z$ であり，箱の高さは z である．ボール紙の面積一定という条件より $xy = a^2$ なので，これを用いて y を消去して，

$$V = (x - 2z)(y - 2z)z = (x - 2z)\left(\frac{a^2}{x} - 2z\right)z$$

b) $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0$ を解けばよい．

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -2z^2\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right), \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = a^2 - 4z\left(x + \frac{a^2}{x}\right) + 12z^2,$$

となり，D 内においては V の臨界点は $(x, z) = \left(a, \frac{a}{6}\right)$ のみであることがわかる．

c) $(x, z) = \left(a, \frac{a}{6}\right)$ のとき，$V = \frac{2a^3}{27}$ となる．また，このとき $y = a$ でもある．したがって，箱の寸法は，縦 $\frac{2a}{3}$, 横 $\frac{2a}{3}$, 高さ $\frac{a}{6}$ ということになる．

d) $L(x, y, z) = V(x, y, z) - \lambda(xy - a^2) = (x - 2z)(y - 2z)z - \lambda(xy - a^2)$ とおく．

$$\frac{\partial L}{\partial x} = (y - 2z)z - \lambda y, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = (x - 2z)z - \lambda x,$$
$$\frac{\partial L}{\partial z} = xyz - 2(x + y)z^2 - z^3, \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = xy - a^2$$

最初の 2 つの式から $z(y - x) = 0$ を得るが，$z = 0$ だと $V = 0$ とり，V は最大ではない．$y = x$ を 3 式に代入すると，$(x - 2z)(x - 6z) = 0$ となる．$x = 2z$ のときも $V = 0$ となるので不可．よって $x = 6z$．また，$y = x$ を 4 式に代入すると $x = y = a$．V はの底面が一辺 $x = \frac{2}{3}a$ の正方形で、高さ $\frac{a}{6}$ の直方体のとき最大．

$\boxed{7}$ a) $S(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.

b) $V(r, h) = \pi r^2 h$ であるので，$L(r, h, \lambda) = \pi r^2 h - \lambda(2\pi r^2 + 2\pi rh - 24\pi)$ とおく．

$$\frac{\partial L}{\partial r}(r, h, \lambda) = 2\pi rh - \lambda(4\pi r + 2\pi h) = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial h}(r, h, \lambda) = \pi r^2 - \lambda(2\pi r) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(r, h, \lambda) = 2\pi r^2 + 2\pi rh - 24\pi = 0$$

最初の２式から λ を消去すると，$r(2r - h) = 0$ を得る．$r = 0$ は第３式をみたさない．d 第３式に $h = 2r$ を代入すると，$r = \pm 2$ を得るが，この問題では $r > 0$ と考えるべきなので，$r = 2$．このとき $h = 4$ となる．（この円柱を真横からみると正方形に見える．）

$\boxed{8}$ Taylor 展開を用いて次の極限を求めよ．

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{x - \log(1 + x)}{e^x - 1 - x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - (1 + x)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)} = \frac{1 - \frac{2x}{3} + o(x)}{1 + \frac{x}{3} + o(x)} = 1$$

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right) - \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right)}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2) - 1} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{x + o(x^2)}{x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + o(x)}{1 + \frac{x}{2} + o(x)} = 1$$

$\boxed{9}$ a) $\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + o(x^4)$

b) $f(x) = \sqrt{1 + x}$ とし，$R_3(\alpha) = \sqrt{1 + \alpha} - \left(1 + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{8}\alpha^2\right)$ とおく．$f'''(x) = \frac{3}{8(1 + x)^{\frac{5}{2}}}$ なので，$0 < x < \alpha$ では $|f'''(x)|$ は $x = 0$ のとき最大で，$|f'''(x)| \le \frac{3}{8}$．したがって，$|R_3(\alpha)| \le \frac{1}{3!}\frac{3}{8}\alpha^3 = \frac{1}{16}\alpha^3$．

c) $\sqrt{27} = 5\sqrt{1 + \frac{8}{100}} \fallingdotseq 8\left(1 + \frac{1}{2}\frac{8}{100} - \frac{1}{16}\left(\frac{8}{100}\right)^2\right) = 5.196$．このときの誤差は $5R_3(\alpha)$ であり，$5|R_3(\alpha)| \le 5\frac{1}{16}\left(\frac{8}{100}\right)^3 = 0.00016$ だから，$-0.00016 \le 5R_3(\alpha) \le 0.00016$．となる．したがって，得られた近似値と $\sqrt{27}$ の値とは小数第 2 位までは必ず一致するといえる．