Taylor 展開を用いた近似計算

$f(x)$ の $x=0$ のまわりでの漸近展開としての Taylor 展開

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\dots\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

は $x\to 0$ のときの極限を計算するには適しているが，$f(x)$ の近似値を計算するには役に立たない．誤差の評価ができないからである．近似計算をするには次のようにして誤差が評価できることが知られている．今 $f(a)$ を近似計算しようとするとき，真の値と近似値の差を $R_{n+1}(a)$ とおく．すなわち

$$R_{n+1}(a)=f(a)-\left(f(0)+f'(0)a+\frac{f''(0)}{2!}a^2+\frac{f'''(0)}{3!}a^3+\dots\frac{f^{(n)}(0)}{n!}a^n\right)$$

とおく．このとき，$a>0$ ならば

$(*)$　　$|R_{n+1}(a)|\leqq\dfrac{M}{(n+1)!}a^{n+1}$　ただし，M は $|f^{(n+1)}(x)|$ の $0\leqq x\leqq a$ における最大値．

となることが証明できる．（証明は微積分の教科書には大抵書いてあるので，興味があったらそれを参照．）

例　$\sqrt{65}=\sqrt{64+1}=8\sqrt{1+1/64}$ なので $f(x)=\sqrt{1+x}$ の $x=0$ まわりでの Taylor 展開を用いる．ここでは $n=2$，$a=1/64$ として近似値とそのときの誤差を求めてみる．先ず微分を計算すると，

$$f'(0)=\frac{1}{2\sqrt{1+0}}=\frac{1}{2},\qquad f''(0)=\frac{-1}{4(1+0)^{3/2}}=-\frac{1}{4},\qquad f'''(x)=\frac{3}{8(1+x)^{5/2}}$$

となる．したがって，近似値は

$$\sqrt{65}=8\sqrt{1+\frac{1}{64}}\fallingdotseq 8\left(f(0)+f'(0)\frac{1}{64}+\frac{f''(0)}{2!}\left(\frac{1}{64}\right)^2\right)=8.062255859375$$

また，$x\geqq 0$ のとき，$(1+x)^{5/2}\geqq(1+0)^{5/2}=1$ であることを用いると

$$|f'''(x)|=\left|\frac{3}{8(1+x)^{5/2}}\right|\leqq\frac{3}{8}$$

となるから，この場合の M は $\frac{3}{8}$ としてよい．したがって，近似の誤差は、上の $(*)$ を用いて

$$8\times\left|R_3\left(\frac{1}{64}\right)\right|\leqq 8\times\frac{\left(\frac{3}{8}\right)}{3!}\left(\frac{1}{64}\right)^3\fallingdotseq 0.00000190735$$

と評価できる．これより，$\sqrt{65}$ の小数点以下第 5 位までの値は 8.06225 であることがわかる．

$\boxed{1}$　a)　$\sqrt{26}$ の値を小数点以下 3 桁まで求めよ．

b)　$\cos 0.01$ の値を小数点以下 10 桁まで正しく求めよ．

$\boxed{2}$　a)　α を正の実数とするとき，$1+\alpha$ の 立方根 $\sqrt[3]{1+\alpha}$ を $1+\dfrac{\alpha}{3}-\dfrac{\alpha^2}{9}$ で近似したときの誤差の範囲を評価せよ．

b)　$\sqrt[3]{9}=2\sqrt[3]{1+\frac{1}{8}}$ という表示と a) の近似式を応用して $\sqrt[3]{9}$ の近似値を計算せよ．また，このようにして得られた近似値と $\sqrt[3]{9}$ の値とは小数第何位まで一致するといえるか．