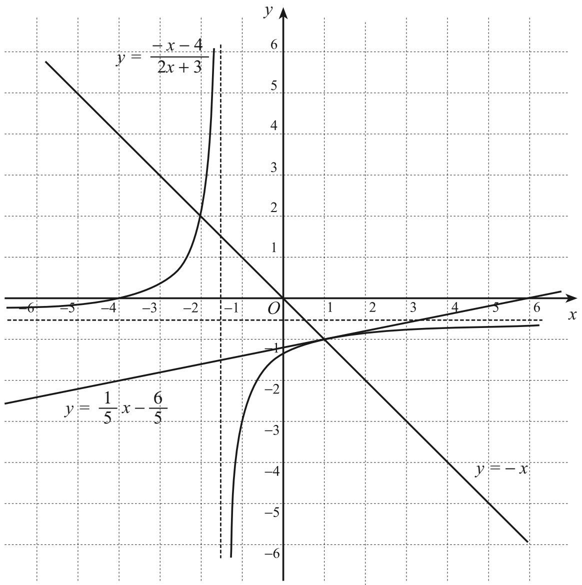
「復習問題」（12 月 19 日配布） 解答例

$\boxed{1}$ a) $\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=\dfrac{1}{7}$

b) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{-5-h}{5+2h}+1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{5+2h}=\frac{1}{5}$

c) 接線の方程式は $y-f(1)=f'(1)(x-1)$ だから，$y=\dfrac{1}{5}x-\dfrac{6}{5}$

d) $f(x)=\dfrac{-x-4}{2x+3}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\left(-\frac{5}{4}\right)}{x+\frac{3}{2}}$ とかけるので，$y=f(x)$ のグラフは $y=\dfrac{\left(-\frac{5}{4}\right)}{x}$ のグラフを x 軸方向に $-\dfrac{3}{2}$，y 軸方向に $-\dfrac{1}{2}$ だけ平行移動した曲線である．



e) $y=f(x)$ のグラフの方が $y=-x$ のグラフより上にある x の範囲を求めればよい．$y=f(x)$ と $y=-x$ の交点の x 座標は -2 と 1 なので，上のグラフを参照して，$-2<x<-\dfrac{3}{2}$，$x>1$.

$\boxed{2}$ a) 定義域は $-4x+6\geq 0$，すなわち $x\leq\dfrac{3}{2}$．また，値域は $y\geq 0$.

b) $y=\sqrt{-4x+6}$ を x について解くと $x=-\dfrac{1}{4}y^2+\frac{3}{2}$ となる．ここで，x と y を入れ換えて，$y=-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{3}{2}$．すなわち，$f^{-1}(x)=-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{3}{2}$.

c) 逆関数 $f^{-1}(x)$ の定義域は $f(x)$ の値域（で x と y を入れ換えたもの）なので，$x\geq 0$. また，$f^{-1}(x)$ の値域は $f(x)$ の定義域（で x と y を入れ換えたもの）なので，$y\leq\dfrac{3}{2}$.

$\boxed{3}$ $(g\circ f)=g\left(\dfrac{6}{3-x}\right)=\dfrac{-3\left(\frac{6}{3-x}\right)}{2-\frac{6}{3-x}}=\dfrac{-18}{2(3-x)-6}=\dfrac{9}{x}$

$(f\circ g)=f\left(\dfrac{-3x}{2-x}\right)=\dfrac{6}{3-\left(\frac{-3x}{2-x}\right)}=\dfrac{6(2-x)}{3(2-x)+3x}=2-x$

$\boxed{4}$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\frac{1}{1+(a+h)^2}-\frac{1}{1+a^2}}{h}=\frac{1}{h}\cdot\frac{1+a^2-(1+(a+h)^2)}{(1+a^2)(1+(a+h)^2)}$$
$$=\frac{1}{h}\cdot\frac{-2ah-h^2}{(1+a^2)(1+(a+h)^2)}=\frac{-2a-h}{(1+a^2)(1+(a+h)^2)}$$

$\boxed{5}$ a) $\left((x^2+2x-1)^7\right)'=7(x^2+2x-1)^6(x^2+2x-1)'=14(x+1)(x^2+2x-1)^6$

b) $\left(\dfrac{2x-5}{3x^2+1}\right)'=\dfrac{(2x-5)'(3x^2+1)-(2x-5)(3x^2+1)'}{(3x^2+1)^2}=\dfrac{2(3x^2+1)-(2x-5)(6x)}{(3x^2+1)^2}$
$=\dfrac{-2(3x^2-15x-1)}{(3x^2+1)^2}$

c) $\left((x^2+3)(x^2-2x+2)\right)'=(x^2+3)'(x^2-2x+2)+(x^2+3)(x^2-2x+2)'=$
$2x(x^2-2x+2)+(2x-2)(x^2+3)=2(x^3-6x^2+10x-6)$

d) $\left(\dfrac{x^2-5}{x^2+4}\right)'=\left(1-\dfrac{9}{x^2+4}\right)'=-\dfrac{-9(x^2+4)'}{(x^2+4)^2}=\dfrac{18x}{(x^2+4)^2}$

e) $\left(\dfrac{x^4+3x-2}{x^2}\right)'=(x^2+3x^{-1}-2x^{-2})'=2x-3x^{-2}+4x^{-3}=\dfrac{2x^4-3x+4}{x^3}$

f) $\left(\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)'=\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)'=-\dfrac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$

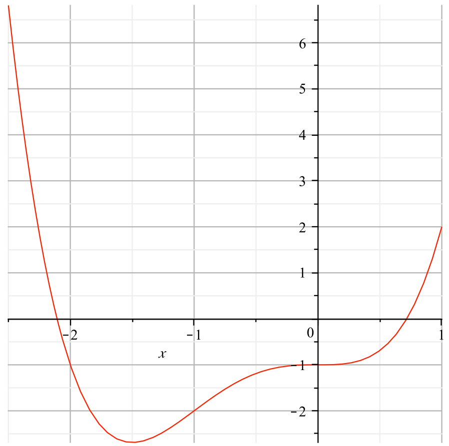
g) $\left(\sqrt[3]{(5x-2)^2}\right)'=\left((5x-2)^{\frac{2}{3}}\right)'=\dfrac{2}{3}(5x-2)^{-\frac{1}{3}}(5x-2)'=\frac{10}{3}(5x-2)^{-\frac{1}{3}}$

h) $\left(\sqrt[3]{2x^2+5}\right)'=\left((2x^2+5)^{\frac{1}{3}}\right)'=\dfrac{1}{3}(2x^2+5)^{-\frac{2}{3}}(2x^2+5)'=\dfrac{4x}{3}(2x^2+5)^{-\frac{2}{3}}$

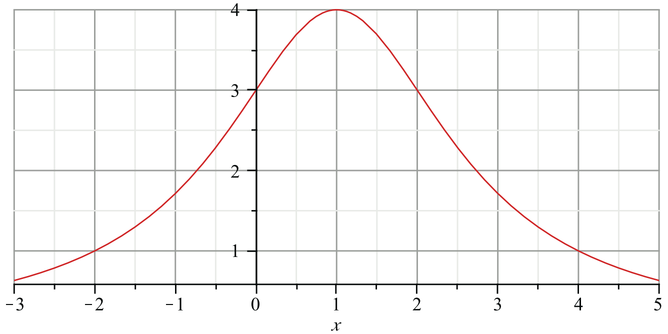
i) $\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)'=\dfrac{-\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)'}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}=-\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}=-\dfrac{\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}$
$=-\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}$

$\boxed{6}$ a) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 1, \qquad f'(x) = 4x^3 + 6x^2 = 2x^2(2x+3)$

$f''(x) = 12x^2 + 12x = 12x(x+1)$



b) $f(x) = \dfrac{12}{x^2 - 2x + 4}, \quad f'(x) = \dfrac{-24(x-1)}{(x^2-2x+4)^2}, \quad f''(x) = \dfrac{72x(x-2)}{(x^2-2x+4)^3}$



c) $f(x) = \dfrac{8x}{x^2+3} + 1, \quad f'(x) = \dfrac{-8(x^2-3)}{(x^2+3)^2}, \quad f''(x) = \dfrac{16x(x-3)(x+3)}{(x^2+3)^3}$