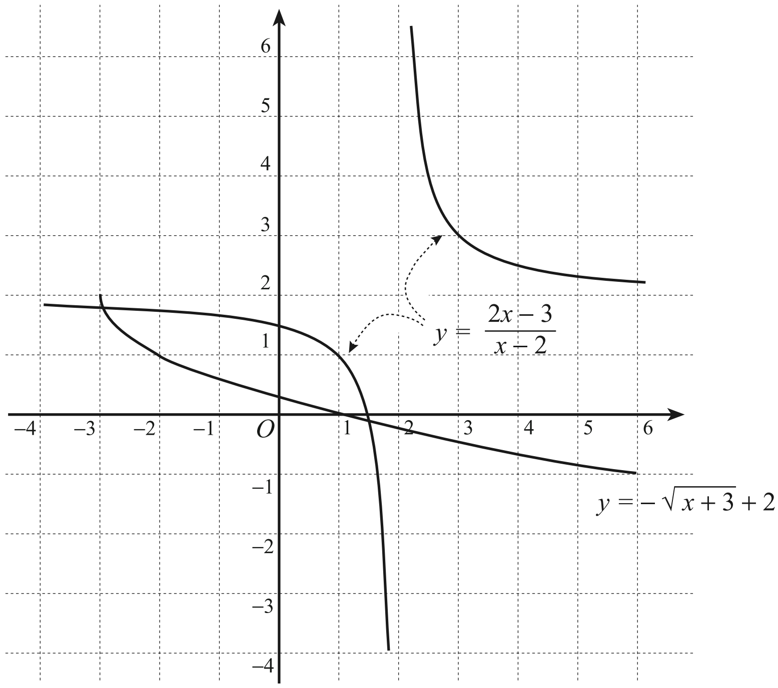
「練習問題」（10 月 17 日配布） 解答例

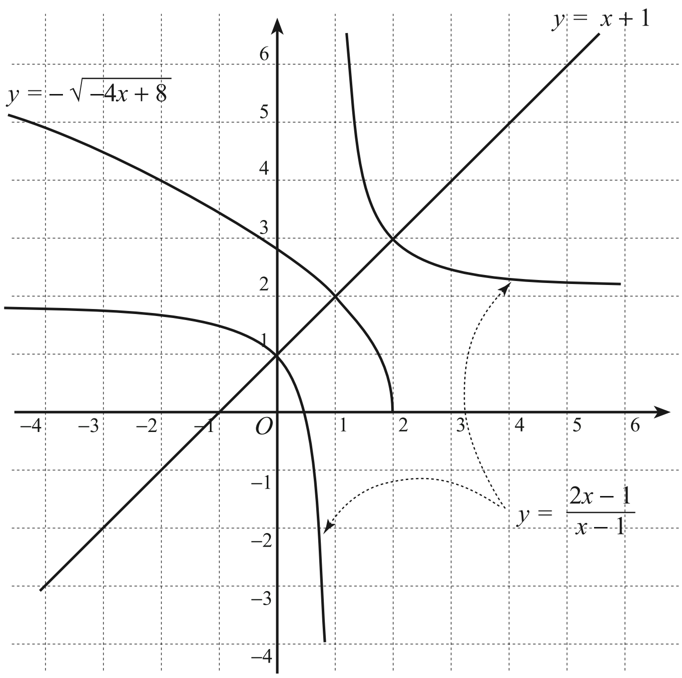
$\boxed{1}$ a) $y = -\sqrt{x+3} + 2$ のグラフは $y = -\sqrt{x}$ のグラフを x 軸方向に -3，y 軸方向に 2 平行移動したもの.

b) $\dfrac{2x-3}{x-2} = 2 + \dfrac{1}{x-2}$ なので，$y = \dfrac{2x-3}{x-2}$ のグラフは $y = \dfrac{1}{x}$ のグラフを x 軸方向に -3，y 軸方向に 2 平行移動したものであり，直線 $y = 2$ と $x = 2$ は $y = \dfrac{2x-3}{x-2}$ の漸近線である.



$\boxed{2}$ a) $y = x + 1$ のグラフが $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ のグラフより上にあるような x の範囲を求める. 右のグラフを参照すれば，解は $0 < x < 1$ または $x > 2$ であることがわかる.

b) $y = \sqrt{-4x+8}$ のグラフのほうが $y = x + 1$ のグラフより上にあるような x の範囲を求める. 右のグラフより，解は $x \leqq 1$



$\boxed{3}$ a) $(g \circ f) = g\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = \dfrac{\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{1-x} - 1} = \dfrac{1}{1-(1-x)} = \dfrac{1}{x}$

$(f \circ g) = f\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = \dfrac{1}{1 - \frac{x}{x-1}} = \dfrac{x-1}{x-1-x} = 1 - x$

b) $(g \circ f) = g\left(2\sqrt{x} + 3\right) = \left(2\sqrt{x} + 3\right)^2 + 1$

$(f \circ g) = f(x^2 + 1) = 2\sqrt{x^2 + 1} + 3$

c) $(g \circ f) = g\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right) = \dfrac{x^2+1}{x} = x + \dfrac{1}{x}$

$(f \circ g) = f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1} = \dfrac{x}{1+x^2}$

d) $(g \circ f) = g\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{1-x} + 1} = \sqrt{\dfrac{2-x}{1-x}}$

$(f \circ g) = f\left(\sqrt{x+1}\right) = \dfrac{1}{1-\sqrt{x+1}} = \dfrac{1+\sqrt{x+1}}{\left(1-\sqrt{x+1}\right)\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$

$= -\left(1 + \sqrt{x+1}\right)$

$\boxed{4}$ a) $(g \circ f) = g\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = \dfrac{\frac{1}{1-x} + a}{\frac{1}{1-x}} = \dfrac{1 + a(1-x)}{1} = 1 + a - ax$

$(f \circ g) = f\left(\dfrac{x+a}{x}\right) = \dfrac{1}{1 - \frac{x+a}{x}} = \dfrac{x}{x-(x+a)} = -\dfrac{x}{a}$

b) $1 + a - ax = -\dfrac{x}{a} \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{a} - a\right)x + (1+a) = 0$　これが，すべての x について成り立たないといけないので，$\dfrac{1}{a} - a = 0$ かつ $1 + a = 0$ が成り立たないといけない．そのためには $a = -1$ となることが必要十分．

$\boxed{5}$ a) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2} = 2 - \dfrac{5}{x+2}$ と変形できる．したがって，定義域は分母が 0 にならないような x の範囲，すなわち $x \neq -2$．また，x をどのように動かしても $\dfrac{-5}{x+2}$ は 0 になれないから，値域は $y \neq 2$.

逆関数を求めるために，まず $y = \dfrac{2x-1}{x+2}$ を x について解く．

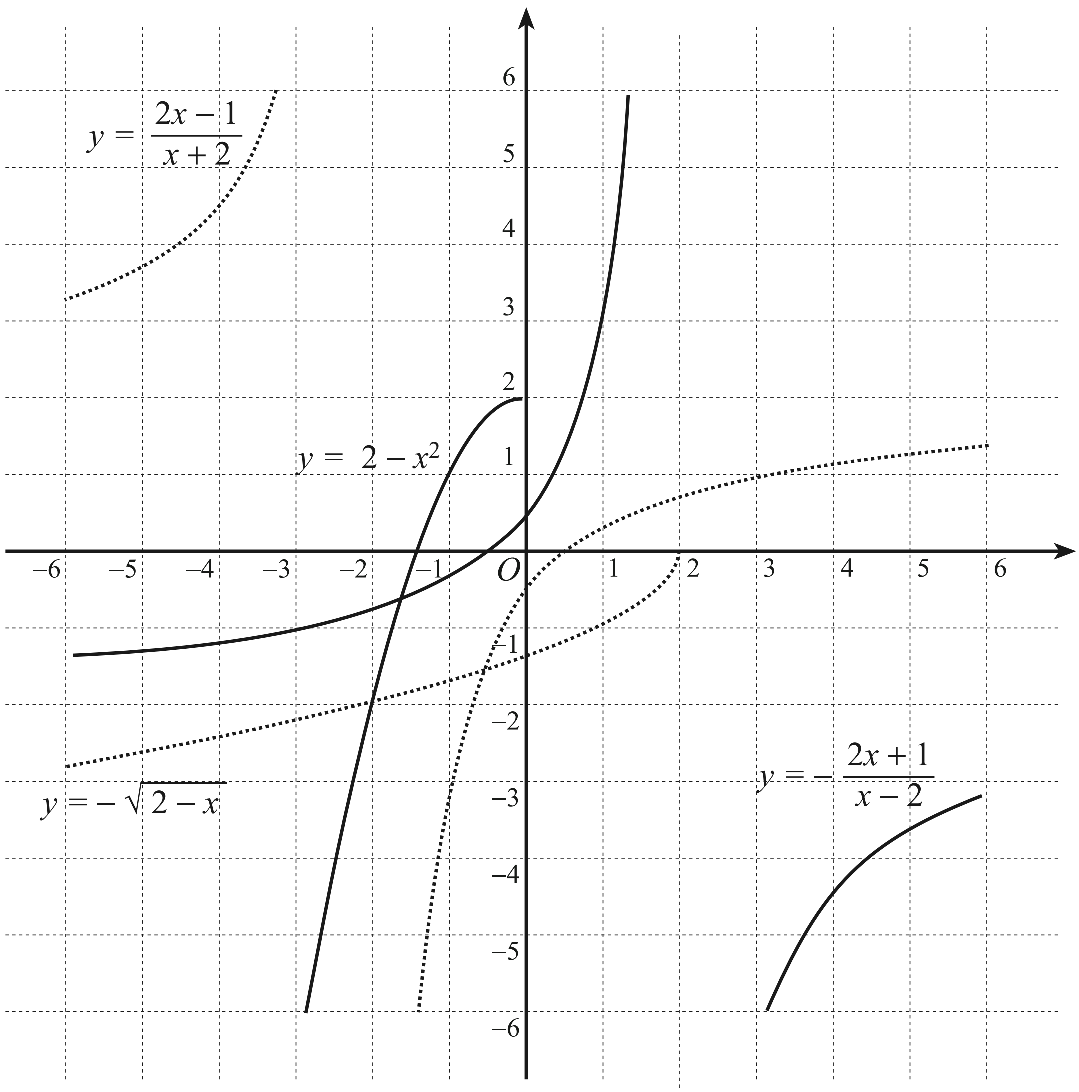
$$
\begin{aligned}
y = \frac{2x-1}{x+2} &\Rightarrow \quad xy + 2y = 2x - 1 \\
&\Rightarrow \quad xy - 2x = -2y - 1 \\
&\Rightarrow \quad x(y-2) = -(2y+1) \\
&\Rightarrow \quad x = -\frac{2y+1}{y-2}
\end{aligned}
$$

ここで x と y を入れ換えて，$y = -\dfrac{2x+1}{x-2}$ を得る．すなわち，$f^{-1}(x) = -\dfrac{2x+1}{x-2}$．逆関数の定義域と値域は，それぞれ，元の関数の値域と定義域に一致する．したがって，定義域は $x \neq 2$，値域は $y \neq -2$.

b) $f(x) = -\sqrt{2-x}$ の定義域は根号の中が負にならないような x の範囲，すなわち $x \leqq 2$.
また，$-\sqrt{2-x}$ は負または 0 なので，値域は $y \leqq 0$.
逆関数を求めるために，まず $y = -\sqrt{2-x}$ を x について解く．

$$y = -\sqrt{2-x} \quad \Rightarrow \quad y^2 = 2 - x \quad \Rightarrow \quad x = -y^2 + 2$$

ここで x と y を入れ換えて，$y = -x^2 + 2$ を得る．すなわち，$f^{-1}(x) = -x^2 + 2$．逆関数の定義域と値域は，それぞれ，元の関数の値域と定義域に一致する．したがって，定義域は $x \leqq 0$，値域は $y \leqq 2$.



$\boxed{6}$ a) $$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\big((a+h)^2-(a+h)\big)-(a^2-a)}{h} = \frac{2ah+h^2-h}{h}$$
$$= 2a+h-1$$

b) $$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{1-(a+h)}-\frac{1}{1-a}}{h} = \frac{1}{h}\cdot\frac{1-a-(1-a-h)}{(1-a)(1-a-h)} = \frac{1}{(1-a)(1-a-h)}$$

c) $$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\sqrt{1-(a+h)}-\sqrt{1-a}}{h} = \frac{1}{h}\cdot\frac{(1-a-h)-(1-a)}{\sqrt{1-(a+h)}+\sqrt{1-a}}$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{1-a-h}+\sqrt{1-a}}$$